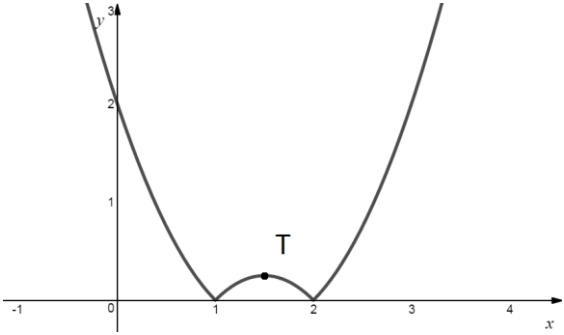
РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА И НЕЈЕДЕНАЧИНА ГРАФИЧКОМ МЕТОДОМ

У наредном тексту ћемо кроз неколико примера приказати методу решавања једначина и неједначина графичком методом.

Задаци:

1. За које вредности реалног параметра a једначина $|x^2 - 3x + 2| = a$ има највише решења?

Посматрајмо леву страну једначине као функцију *f(x)* , а десну као *g(x)*. График функције *f(x)*=$|x^2 - 3x + 2|$ изгледа овако:



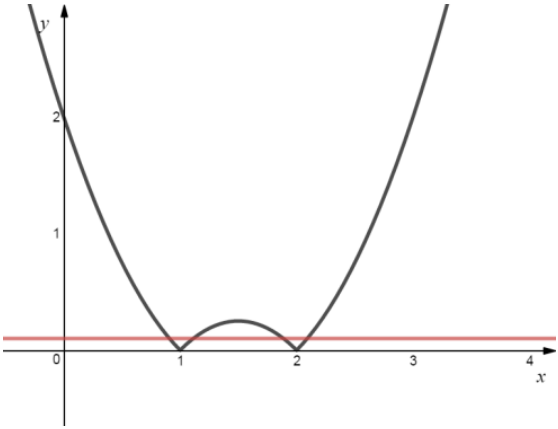
Тачка Т има координате $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Функција *g(x)*је константна за свако *x*па је њен график паралелан са *x*-осом. Пресеци два графика даће решења једначине. Постоје 4 могућности:

1. Ако је a<0 једначина нема решења јер нема пресека са графиком функције *f(x)*;

2. Ако је a=0 или $a > \frac{1}{4}$ графици имају 2 пресека;

3. Ако је a=$\frac{1}{4}$ једначина има 3 решења;

4. Ако је $0 < a < \frac{1}{4}$ графици се секу на 4 места, па једначина има 4 решења (на слици испод).



Одавде следи да је највећи број решења дате једначине 4 за $0 < a < \frac{1}{4}$.

2. Графички представити решења једначине $|x| + |y| = 2$.

Дату једначину посматрамо у сваком квадранту посебно.

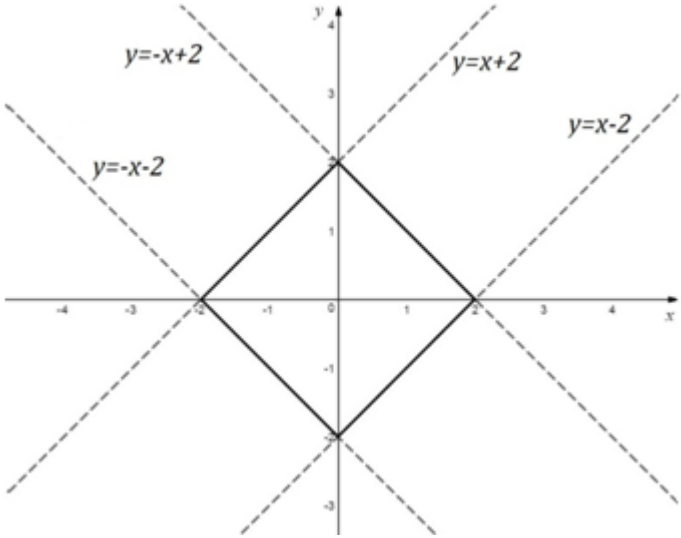
1. квадрант $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 2$, $y = 2 - x$, цртамо ову праву

2. квадрант $x < 0$, $y > 0$, $-x + y = 2$, $y = x + 2$, цртамо ову праву

3. квадрант $x < 0$, $y < 0$, $-x - y = 2$, $y = -x - 2$, цртамо ову праву

4. квадрант $x > 0$, $y < 0$, $x - y = 2$, $y = x - 2$, цртамо ову праву

У првом квадранту само је права $y = 2 - x$ решење једначине, у другом $y = x + 2$, у трећем $y = -x - 2$, а у четвртом $y = x - 2$, па су само делови праве у том квадранту важећи, као што је приказано на графику.



3. Решити систем једначина у зависности од параметра m: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = m \end{cases}$

Једначина $x^2 + y^2 = 25$ се приказује као круг са центром у координатном почетку и полупречником 5. Линеарном једначином $3x + 4y = m$ одређен је скуп правих у равни паралелних правој $y = -\frac{3}{4}x$. Видимо да права и круг могу да се секу у двема тачкама, у једној тачки или да немају заједничких тачака.

Решимо на описани начин овај систем једначина.

Из линеарне једначине добија се да је

$$x = \frac{m}{3} - \frac{4}{3}y$$

Заменом у прву једначину имамо

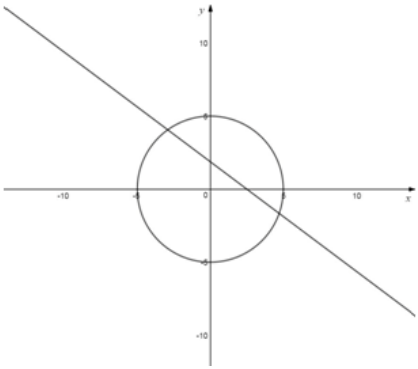
$$25y^2 - 8my + m^2 - 225 = 0$$

Дискриминанта ове једначине је $D = (-8m)^2 - 4(25(m^2 - 225))$

$$D = 625 - m^2$$

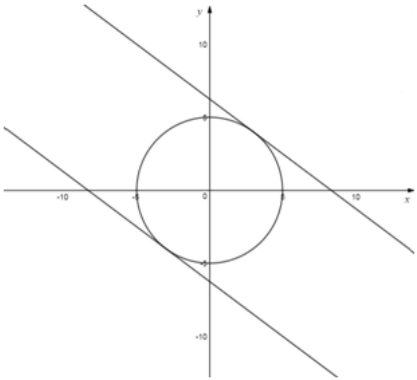
1. $D > 0\,, m^2 < 625$

У овом случају постојаће две пресечне тачке, односно два решења, а то се дешава за $-25 < m < 25$



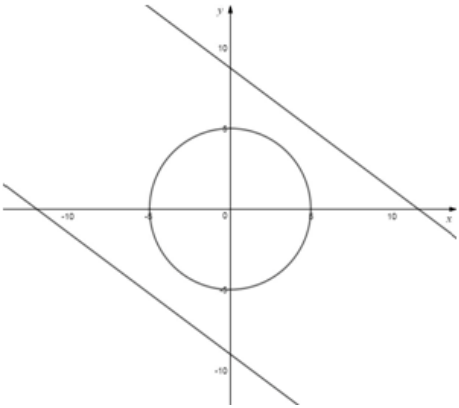
2. $D = 0, m^2 = 625$

У овом случају права додирује круг у једној тачки, па онда постоји једно решење $m = 25\,, m = -25$.



3. $D < 0\,,\ m^2 > 625$

У овом случају нема пресечних тачака , па нема ни решења система за $m < -25$ и $m > 25$.



4. Решити систем неједначина у зависности од параметра a:

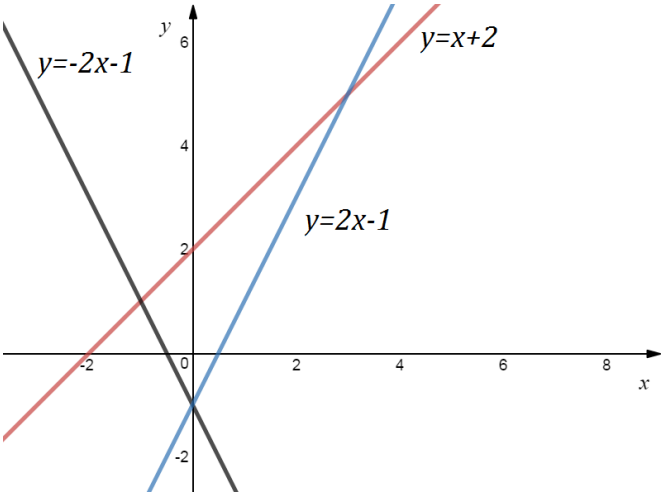
$$x - y + 2 \geq 0$$
$$2x + y + 1 \geq 0$$
$$2x - y - 1 \leq 0$$
$$y = a$$

Дате неједначине, редом, могу се написати на следећи начин:

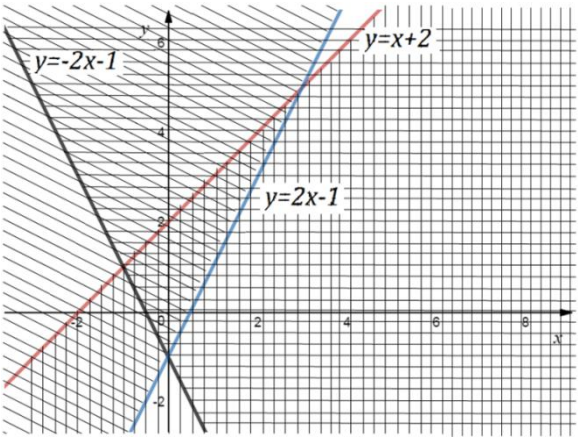
$$y \leq x + 2$$
$$y \geq -2x - 1$$
$$y \geq 2x - 1$$

Да би решили систем графичком методом, најпре ћемо конструисати графике следећих функција:

$$y = x + 2$$
$$y = -2x - 1$$
$$y = 2x - 1$$



Посматрамо полуравни одређене графицима. Неједначини $y \leq x + 2$ одговара полураван испод графика $y = x + 2$ јер је за координате свих тачака у тој полуравни неједначина тачна. Слично томе, неједначини $y \geq -2x - 1$ одговараће полураван изнад одговарајућег графика, а неједначини $y \geq 2x - 1$ полураван изнад одговарајућег графика. Обележићемо полуравни и посматрати њихов пресек.

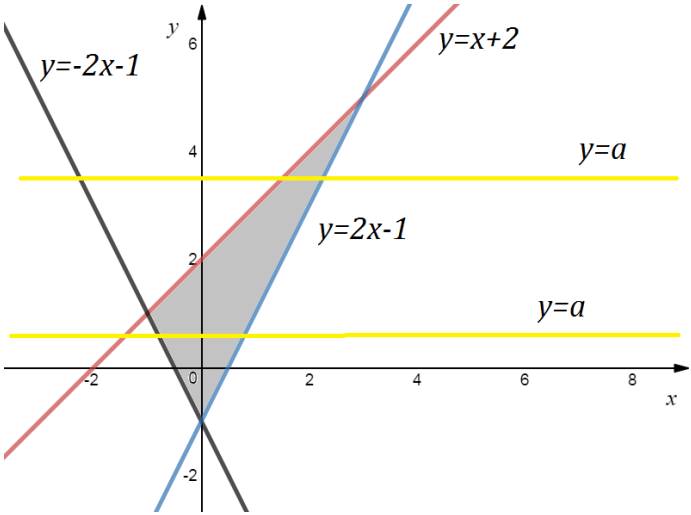


Пресек је троугао ограничен графицима правих. Пресечна тачка графика $y = -2x - 1$ и $y = 2x - 1$ има координате (0, -1), за графике $y = 2x - 1$ и $y = x + 2$ то је тачка са координатама (3, 5) и за графике $y = x + 2$ и $y = -2x - 1$ тачка са координатама (-1, -1). График функције $y = a$ је права паралелна x-оси. Посматрамо три случаја:

1. Ако је $a < -1$ или $a > 5$ систем нема решења јер график функције $y = a$ не сече пресечни троугао.

2. Ако је $-1 \leq a \leq 1$ систем има решења и то су: $y = a$ и $-\frac{a+1}{2} \leq x \leq \frac{a+1}{2}$ (јер се решења налазе на дужи која је пресек праве $y = a$ и пресечног троугла, а њени крајеви су пресеци те праве са правама $y = -2x - 1$ и $y = 2x - 1$).

3.Ако је $1 \leq a \leq 5$ систем такође има решења и то су: $y = a$ и $a - 2 \leq x \leq \frac{a+1}{2}$ (слично као у случају 2).

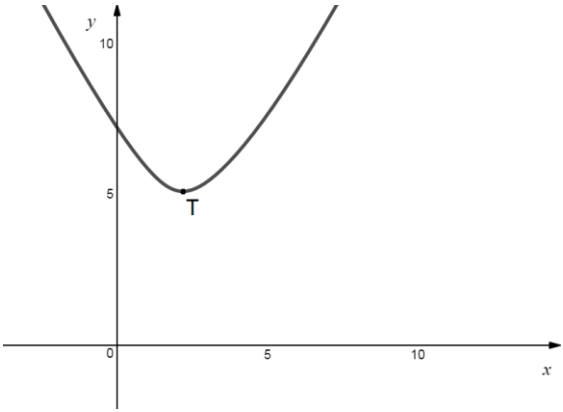


5. За које вредности параметра m једначина

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 25} = m$$

има решења?

График функције $\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x^2-6x+25}$ изгледа овако:



Доказаћемо да је y-координата њеног темена $\sqrt{26}$ што ће бити и најмања вредност параметра m.

Најпре ћемо поставити услове за које једначина има смисла. Вредности под коренима морају бити веће или једнаке 0, а дискриминанте квадратних једначина су: $D1=42-4\cdot 5=16-20=-4<0$ и $D2=62-4\cdot 25=36-100=-64<0$ одакле следи да су обе једначине веће од 0 за свако $x\in R$. Како је лева страна једначине већа од 0 мора бити и десна страна па је $m\geq 0$. Квадрирамо једначину и после сређивања добијамо:

$$\sqrt{(x^2-4x+5)(x^2-6x+25)}=\frac{m^2}{2}-(x^2-5x+15).$$

Поново поставимо услов за десну страну: $m^2\geq 2x^2-10x+30$. Теме функције са десне стране има координате $(\frac{5}{2},\frac{35}{2})$, а да би услов важио мора да важи $m^2\geq\frac{35}{2}$ одакле следи услов$m\geq\sqrt{\frac{35}{2}}$ (услов $m\leq-\sqrt{\frac{35}{2}}$ не узимамо у обзир јер важи $m\geq 0$). Потом квадрирамо и после сређивања добијамо:

$$(m^2-1)x^2+(20-5m^2)-\frac{m^4}{4}+15m^2-100=0.\ (*)$$

Једначина (*) мора имати решења да би имала и полазна јер су еквивалентне. Дискриминанта једначине (*) мора бити D≥0.

$$\mathrm{D} = (20 - 5m^2)^2 - 4(m^2 - 1)\left(-\frac{m^4}{4} + 15m^2 - 100\right)$$
$$= m^6 - 36m^4 + 260m^2 = m^2(m^4 - 36m^2 + 260) \geq 0$$

Пошто је $m^2 \geq 0$ мора бити $m^4 - 36m^2 + 260 \geq 0$. Уведемо смену $t=m^2$. Решење ове неједначине је $t \geq 26$ или $t \leq 10$ односно $m^2 \geq 26$ или $m^2 \leq 10$. Одавде следи да важи $m \geq \sqrt{26}$ (случај $m^2 \leq 10$ не узимамо у обзир због услова $m \geq \sqrt{\frac{35}{2}}$, а $m \leq -\sqrt{26}$ због услова $m \geq 0$), што је решење задатка.

Ђорђе Трифуновић II-1
Милош Миловановић II-1

РЕШЕТКЕ И МРЕЖЕ – ПИКОВА ТЕОРЕМА

I Правилни полигони на целобројној решетки

Дефиниција 1: Скуп тачака R са целобројним координатама у Декартовом правоуглом координатном систему назива се целобројна решетка, тј.

$$R = \{(x, y)|x, y \in Z\}.$$

Дефиниција 2: Скуп тачака у равни P чије координате представљају целобројне умношке реалних вредности p и q $(p > 0, q > 0)$ редом, назива се правоугаона решетка, тј.

$$P_{p,q} = \{(xp, yq)|x, y \in Z\}.$$

Дефиниција 3: За полигон се каже да је разапет на целобројној или правоугаоној решетки ако сва његова темена припадају тој решетки.

Тврђење 1: Ако три темена паралелограма припадају правоугаоној решетки, тада њој припада и четврто теме паралелограма.

Доказ: Нека је дата правоугаона решетка

$$P_{p,q} = \{(xp, yq)|x, y \in Z\}.$$

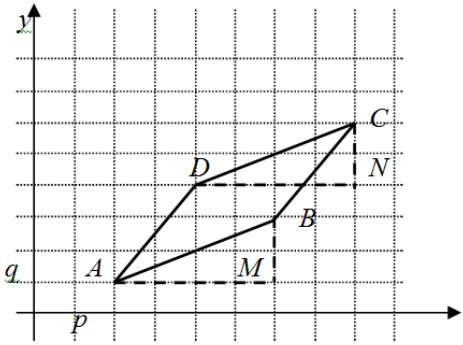
Тачке $A(px_1, qy_1), B(px_2, qy_2)$ и $C(px_3, qy_3)$ су неке три различите тачке те решетке. Четврто теме паралелограма је тачка D. Нека је тачка M подножје нормале из тачке B на праву која садржи тачку A и паралелна је са x-осом, а тачка N подножје нормале из тачке C на праву која садржи тачку D и паралелна је са y -осом (слика 1).

Како важи да је $|BM| = |CN|$ и $|AM| = |DN|$, могу се израчунати координате тачке D(k,l):

$$k = \big|px_3 - |DN|\big| = \big|px_3 - p|x_2 - x_1|\big| = p\big|x_3 - |x_2 - x_1|\big| = pk_1, k_1 \in Z$$

$$l = \big|qy_3 - |CN|\big| = \big|qy_3 - q|y_2 - y_1|\big| = q\big|y_3 - |y_2 - y_1|\big| = ql_1, l_1 \in Z,$$

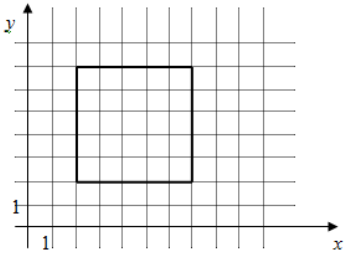
а то значи да D припада правоугаоној решетки $P_{p,q}$.♦



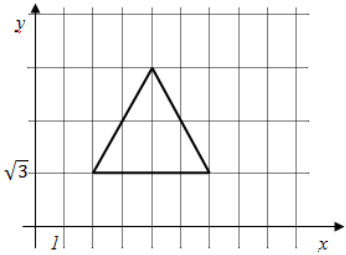
Слика 1

<u>Тврђење 2</u>: Једнакостранични троугао, квадрат и правилни шестоугао се могу разапети на некој правоугаоној решетки.

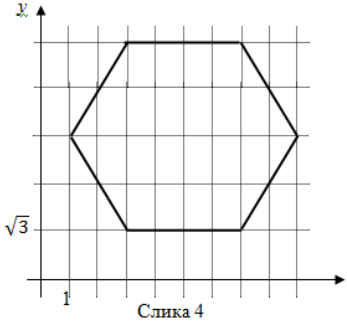
<u>Доказ</u>: Решење је дато на следећим сликама 2, 3 и 4. ♦



Слика 2



Слика 3

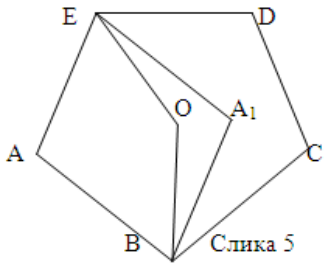


Слика 4

<u>Тврђење 3</u>: Једнакостранични троугао, квадрат и правилни шестоугао су једини правилни полигони који се могу разапети на некој правоугаоној решетки.

<u>Доказ</u>: Ако постоји неки петоугао који се може разапети на некој правоугаоној решетки, тада постоји и најмањи такав петоугао.

Према тврђењу 1, тачка A_1, као четврто теме паралелограма $BAEA_1$ припада правоугаоној решетки. Тачка O је центар петоугла.



Слика 5

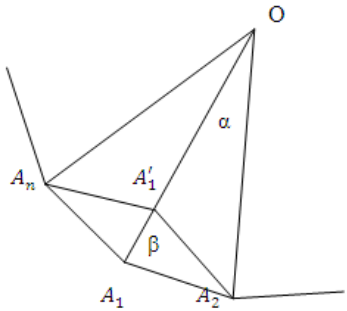
Важи да је:

$$\sphericalangle EA_1B = 108°$$
$$\sphericalangle EOB = 144°.$$

Дакле, распоред је $A - O - A_1$. Слично ћемо добити тачке B_1, C_1, D_1 и E_1. Ове тачке чине правилан петоугао који је мањи од петоугла *ABCDE*, а разапет је на решетки.

Ово је у супротности са претпоставком, чиме је тврђење доказано за петоугао.

Слично се показује и за произвољан правилан n-тоугао ($n \geq 7$). Претпоставимо да је $A_1A_2A_3 \dots A_n$ најмањи n-тоугао који се може разапети на правоугаоној решетки (слика 6).



Слика 6

Важи да је:

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$

$$\alpha \leq \frac{360°}{7} \quad ..... \quad (1)$$

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2}$$

$$\beta \geq \frac{180° - \frac{360°}{7}}{2}$$

$$\beta \geq \frac{450°}{7} \quad ..... \quad (2)$$

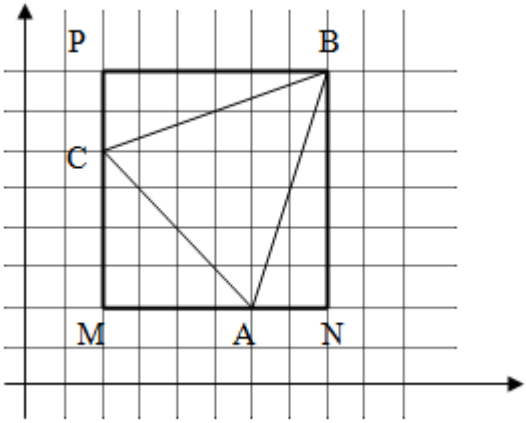
Из (1) и (2) следи $\alpha < \beta$. Даље, следи да је $\sphericalangle A_n A_1' A_2 > \sphericalangle A_n O A_2$, па је распоред $A_1 - A_1' - O$. Слично ћемо добити и тачке $A_2', A_3', \dots, A_n'$. Ове тачке чине правилан n-тоугао разапет на правоугаоној мрежи, који је мањи од полазног $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$, што је супротно са претпоставком. Тиме је доказ завршен. ♦

<u>Тврђење 4</u>: Ако n тачака целобројне решетке представљају темена правилног n-тоугла (n ≥ 3), тада је n=4.

<u>Доказ</u>: По претходном тврђењу једнакостранични троугао, квадрат и правилни шестоугао су једини правилни полигони који се могу разапети на некој правоугаоној решетки. Јасно је да се квадрат може разапети на

целобројној решетки. Треба показати да се једнакостранични троугао и правилни шестоугао не могу разапети на целобројној решетки.

Ако се претпостави да се на целобројној решетки може разапети једнакостранични троугао ABC, странице a. Тада је његова површина $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Слика 7

Како је $a^2 \in \mathbb{Q}$ број то је површина троугла ABC ирационалан број.

Са друге стране ако се конструише правоугаоник MNBP као на слици 7, тада је

$$P(\Delta ABC) = P(MNBP) - P(\Delta MAC) - P(\Delta ANB) - P(\Delta BPC),$$

па је површина троугла ABC рационалан број. Мера троугла ABC не може истовремено бити и рационалан и ирационалан број, па је претпоставка неодржива, тј. закључак је да се једнакостранични троугао не може разапети на целобројној решетки.

Ако би се на целобројној решетки могао разапети правилан шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, онда би на тој решетки био разапет и једнакостранични троугао $A_1A_3A_5$, а то је управо показано да није могуће.♦

II Пикова теорема

<u>Дефиниција 4</u>: Пребројива фамилија затворених скупова $M = \{M_i | (i \in N)\}$ се назива мозаик (мрежа, теселација, разбијање), ако њихова унија покрива целу раван и ако свака два скупа из фамилије имају дисјунктне унутрашњости, тј. ако је испуњено:

1) $\varepsilon^2 \subseteq \bigcup_{i \in N} M_i$
2) $I_n(M_i) \cap I_n(M_j) = \emptyset$, за све $i, j \in N,\ i \neq j$.

Најчешће разматрани мозаици су они код којих су елементи фамилије M подударне фигуре. Елементе скупа M се називају елементарне ћелије, елементарне плочице или само ћелије. За две елементарне ћелије кажемо да су суседне ако имају заједничких тачака. Ивице ћелија представљају гране мреже, а њихове крајње тачке, тачке у којима се сусрећу бар три плочице, називају се чворови (или темена) мреже. За полигон чија сва темена припадају скупу чворова неке мреже каже се да је разапет на тој мрежи.

Ако су све елементарне плочице мозаика подударне тада кажемо да је мозаик једнотипни (монохедрални). Ако се све плочице могу поделити у две класе међусобно подударних плочица, тада говоримо о двотипном (дихедралном) мозаику и слично. Најпознатији примери мрежа у равни су квадратна, троугаона и хексагонална које се означавају са *K, T, H* редом. Ако је површина свих елементарних плочица мреже M једнака некој вредности *к*, тада се та мрежа означава са M^k.

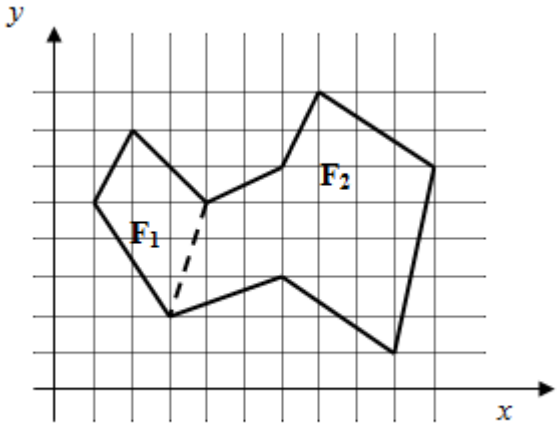
За полигон F који је разапет на произвољној решетки може се увести функција

$$f(F) = \frac{1}{2} b(F) + i(F) - 1,$$

где је са b(F) означен број тачака решетке на ивицама полигона, а i(F) број тачака решетке које припадају унутрашњости полигона.

1) Нека су F_1 и F_2 два полигона са заједничком страницом и дисјунктним унутрашњостима, чија темена припадају скупу чворова једне од мрежа K, T или H. За полигон који је њихова унија тада важи:

$$f(F) = f(F_1) + f(F_2).$$



Слика 8

<u>Доказ</u>: По дефиницији је $f(F_1) = \frac{b(F_1)}{2} + i(F_1) - 1$

$$f(F_2) = \frac{b(F_2)}{2} + i(F_2) - 1.$$

Нека је *к* број тачака на заједничкој страни полигона F_1 и F_2. За полигон који представља унију полигона F_1 и F_2 вредност функција b(F) и i(F) је:

$$b(F) = b(F_1) + b(F_2) - 2k + 2$$

$$i(F) = i(F_1) + i(F_2) + k - 2.$$

Ако се у формули

$$f(F) = \frac{1}{2}b(F) + i(F) - 1$$

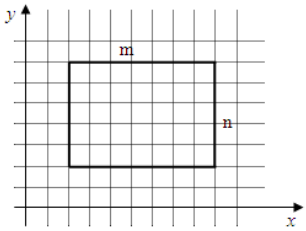
b(F) и i(F) замене горе наведеним вредностима, добија се

$$f(F) = f(F_1) + f(F_2).\blacklozenge$$

Претходни доказ не зависи од врсте мреже (квадратна, троугаона, хексагонална).
Површина полигона F означава се са P(F).

2) Нека је П правоугаоник чија темена припадају скупу чворова мреже $К_1$ са странама паралелним координатним осама. Тада је P(П)=f(П).

<u>Доказ</u>:



Слика 9

Нека је П правоугаоник чије су странице дужина m и n. Његова површина је:

$$P(\Pi) = m \cdot n$$

Број тачака b(П) на рубу правоугаоника је:

$$b(\Pi) = 2m + 2n$$

У унутрашњости правоугаоника има тачака:

$$i(\Pi) = (m-1) \cdot (n-1).$$

Ако се вредности $b(\Pi)$ и $i(\Pi)$ замене у формули

$$f(\Pi) = \frac{1}{2} b(\Pi) + i(\Pi) - 1,$$

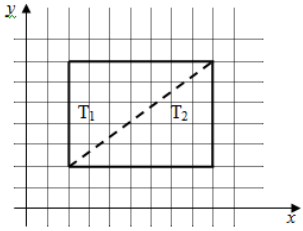
сређивањем се добија да је

$$f(\Pi) = m \cdot n,$$

чиме је показано да је $P(\Pi) = f(\Pi)$.♦

3) Нека је Т правоугли троугао чија темена припадају скупу чворова мреже $К_1$ са катетама које су паралелне координатним осама. Онда је површина троугла Т једнака f(Т).

<u>Доказ</u>: Нека је правоугаоник П једном од својих дијагонала подељен на два правоугла троугла T_1 и T_2, који су подударни са троуглом Т. Важи да је:



Слика 10

$$P(T_1) = P(T_2) = P(T)$$
$$b(T_1) = b(T_2) \ldots (1)$$
$$i(T_1) = i(T_2) \quad \ldots (2)$$

Из релација (1) и (2) следи:

$$f(T_1) = f(T_2) = f(T).$$

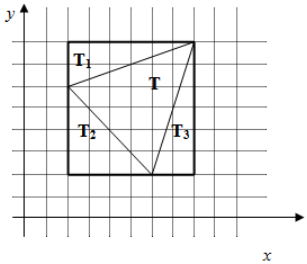
Важе следећи идентитети (по претходно доказаном):

$$P(\Pi) = P(T_1) + P(T_2) = 2P(T)$$
$$f(\Pi) = f(T_1) + f(T_2) = 2f(T).$$

Како је $P(\Pi) = f(\Pi)$, онда је и $P(T) = f(T)$.♦

3) Нека је Т произвољан троугао разапет на квадратној мрежи K_1. Тада је површина троугла Т једнака вредности f(T).

<u>Доказ</u>: Кроз темена троугла могу се поставити по две праве паралелне координатним осама, које чине правоугаоник. Стране троугла деле правоугаоник на највише три правоугла троугла и сам тај троугао.



Слика 11

Уколико је нека од страна паралелна са *x* или *y* осом тада је неки од троуглова T_1, T_2, T_3 дегенерисан. И такви троуглови ће бити узети у разматрање, при чему је вредност функције f за такав троугао нула.

Из задатака 2 и 3, следи да је:

$$f(\Pi) = P(\Pi) \ \ldots (1)$$
$$f(T_1) = P(T_1) \ldots (2)$$
$$f(T_2) = P(T_2) \ldots (3)$$
$$f(T_3) = P(T_3) \ldots (4)$$

Такође важи да је

$$f(\Pi) = f(T_1) + f(T_2) + f(T_3) + f(T)$$
$$P(\Pi) = P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) + P(T).$$

Према релацији (1) је

$$f(T_1) + f(T_2) + f(T_3) + f(T) = P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) + P(T).$$

Из релација (2), (3) и (4) коначно је $f(T) = P(T)$.♦

5) (**<u>Пикова теорема</u>**) Површина полигона F разапетог на целобројној решетки је једнака

$$P(F) = \frac{b(F)}{2} + i(F) - 1,$$

где b(F) означава број чворова решетке са руба полигона F, а i(F) број чворова решетке из унутрашњости полигона F.

<u>Доказ</u>: Нека је дат полигон F разапет на мрежи. Он се може разложити на троуглове. Обележимо са n број троуглова на који је полигон F разложен. Према задатку 4 за сваки троугао T_i ($i \in 1,2, \ldots, n$) важи

$$f(T_i) = P(T_i).$$

Даље, како је

$$P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(T_i)$$

$$f(F) = \sum_{i=1}^{n} f(T_i),$$

коначно је

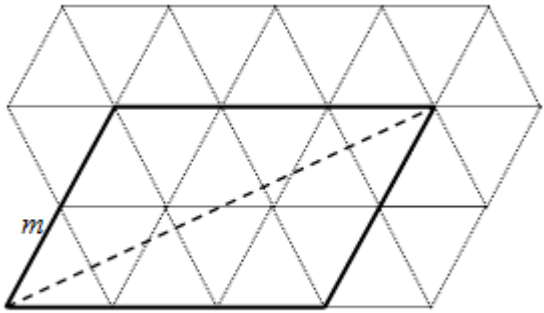
$$P(F) = f(F).\blacklozenge$$

6) Површина полигона разапетог на троугаоној мрежи T_1 (чије су све елементарне ћелије једнакостранични троуглови површине 1) је једнака

$$P(F) = 2 \cdot f(F) = b(F) + 2 \cdot i(F) - 2,$$

где b(F) означава број чворова мреже T_1 са руба полигона F, а i(F) број чворова исте мреже из унутрашњости полигона F.

<u>Доказ</u>: Посматра се паралелограм чије стране припадају троугаоној решетки.



Слика 12

Нека паралелограм П има странице m и n умножака растојања између суседних тачака. Површина паралелограма је $P(\Pi) = 2mn$.

На рубу паралелограма П има b(П) тачака

$$b(\Pi) = 2m + 2n.$$

Унутар паралелограма П има i(П) тачака

$$i(\Pi) = (m-1) \cdot (n-1).$$

Сада се лако показује да је

$$f(\Pi) = \frac{b(\Pi)}{2} + i(\Pi) - 1 = mn.$$

Према томе важи да је $P(\Pi) = 2f(\Pi)$.

Ако се посматра троугао T чије две странице припадају троугаоној мрежи (половина паралелограма), примењујући поступак као у задатку 3, добиће се да је

$$P(T) = 2f(T).$$

Произвољан троугао разапет на троугаоној мрежи се може допунити до паралелограма, па понављајући поступак из задатка 4 добија се да важи

$$P(T) = 2f(T).$$

Нека је дат полигон F, разапет на троугаоној мрежи. Он се може разложити на троуглове. Слично задатку 5, добиће се да је

$$P(F) = 2f(F).\blacklozenge$$

7) Ограничена фигура F разапета на хексагоналној мрежи H_1 се назива хексагонални систем ако је руб фигуре F састављен само од грана хексагоналне мреже. Површина хексагоналног система F разапетог на хексагоналној мрежи H_1 (чије су елементарне ћелије правилни шестоуглови површине 1) је једнака

$$P(F) = \frac{1}{2}f(F) = \frac{1}{4}b(F) + \frac{1}{2}i(F) - \frac{1}{2},$$

где b(F) означава број чворова мреже H_1 са руба хексагоналног система F, а i(F) број чворова исте мреже из унутрашњости хексагоналног система F.

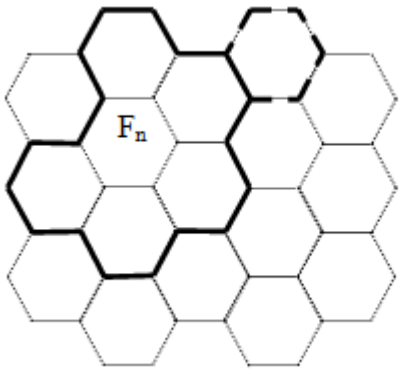
<u>Доказ</u>: Нека је са F_n обележен хексагонални систем који је састављен од n елементарних ћелија. Доказ се може извести математичком индукцијом по броју n. За фигуру F_1 која је елементарна ћелија шестоугаона мреже важи

$$P(F_1) = 1, f(F_1) = 2,$$

tj. $P(F_1) = \frac{1}{2}f(F_1)$.

Нека за све фигуре F_n важи да је $P(F_n) = \frac{1}{2}f(F_n)$.

Треба показати да је $P(F_{n+1}) = \frac{1}{2}f(F_{n+1})$.



Слика 13

Ако је нова ћелија у фигуру F_{n+1} додата тако да има једну заједничку страну са неком фигуром F_n, онда је

$$\frac{1}{2}f(F_{n+1}) = \frac{b(F_n)+4}{4} + \frac{f(F_n)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}f(F_n) + 1 = P(F_n) + 1 = P(F_{n+1}).$$

Идентично се разматрају случајеви када нова ћелија има две, три, четири или пет заједничких страна са фигуром F_n.

Дакле, важи $P(F) = \frac{1}{2}f(F)$.♦

8) Нека је ABC троугао чија су темена чворови целовројне мреже, на чијем обиму нема других темена мреже осим тачака A, B и C, а у унутрашњости је тачно једана тачка целобројне мреже O. Доказати да је O тежиште троугла ABC.

<u>Доказ</u>: Према Пиковој теореми је:

$$P(\Delta AOB) = P(\Delta AOC) = P(\Delta BOC) = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}.$$

Дакле, дужи AO, BO и CO деле троугао ABC на три дела једнаких површина, па је тиме O тежиште.♦

9) Темена n-тоугла $A_1A_2A_3 \dots A_n$ су чворови целобројне мреже. Која је најмања а која је највећа површина коју такав n-тоугао може имати?

<u>Коментар</u>: Према Пиковој теореми је

$$P(F) = \frac{b(F)}{2} + i(F) - 1,$$

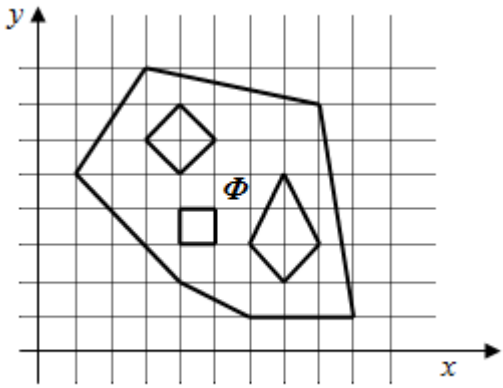
Да би P(F) било минимално, b(F) и i(F) морају бити најмањи могући. Величина b(F) је најмања ако осим темена на рубу нема других тачака решетке, а i(F) може бити једнако нули.

Слично, да би n-тоугао имао мајвећу могућу површину потребно је учинити што већим величине b(F) и i(F).♦

10) Ако је на целобројној решетки K_1 разапет полигон F са n рупа онда се његова површина може израчунати формулом

$$P(F) = \frac{b(F)}{2} + i(F) - 1 + n,$$

где b(F) означава број чворова решетке са руба полигона F, а i(F) број чворова решетке из унутрашњости полигона F. (без доказа!)



Слика 14

$$b(F) = 22$$
$$i(F) = 19$$
$$n = 3$$
$$P(F) = 11 + 19 - 1 + 3 = 32$$

III George Alexander Pick

George Alexander Pick (1859 – 1942) је био аустријски математичар, јеврејског порекла. Умро је нажалост у концентрационом логору. Формулу, данас познату као Пикова теорема објавио је у једном чланку 1899. године, а популаризована је 1969. године када ју је Hugo Dyonizy Steinhaus уврстио у едицију Mathematical Snapshots.

Студирао је на Бечком универзитету, где је одбранио докторат 1880. године. Након тога радио је као асистент на Прашком универзитету, где је већ 1881. постао предавач. Следећа институција у којој је радио је Универзитет у Лајпцигу, само 1984. године. Врло брзо се вратио у Праг и тамо је остао до пензионисања 1927. године, после чега се вратио у родни Беч.

Пик је председавао комитетом који је поставио Ајнштајна за руководиоца катедре за математичку физику 1911 на тадашњем Германском универзитету у Прагу. Он је упутио Ајнштајна у радове италијанских математичара (Gregorio Ricci-Curbastro, Tullio Levi-Civita) у области диференцијалног рачуна, што је касније 1915. Ајнштајн сјајно искористио да успешно формулише Теорију релативитета.

Након анексије Аустрије у оквир Немачке, Пик се 1938. поново преселио у Праг. Нацисти су га сместили у логор 13. јула 1942., где је и умро две недеље касније.

Владимир Мишић

ИЗ ИСТОРИЈЕ КОМБИНАТОРИКЕ

Може се рећи да се комбинаторика, као грана математике, озбиљније развија од седамнаестог века нове ере. Све до појаве рачунарских машина чинило се да се комбинаторика не развија у ритму осталих математичких дисциплина. Од тада она добија на значају, а комбинаторне методе данас имају веома озбиљне примене у статистици, теорији случајних процеса, математичком програмирању, информатици и уопште у прављењу планова за разне експерименте. У бити онога што мање или више јесте комбинаторика, појављују се и друге математичке дисциплине као што су комбинаторна геометрија, представљања група, коначних геометрија, неасоцијативних алгебри и тако даље.

Ако би желели да се на кратко вратимо на почетак, једноставно је закључити да је све у математици почело бројањем неких објеката јер је људима постајало важно да нађу начин како да некој групи предмета придруже нешто што ће одсликавати неко њено квантитативно својство. У неким каснијим сегментима развоја поред бројања било је важно групе објеката и класификовати или на одређени начин комбиновати објекте из различитих група у неке пожељне конфигурације. Управо такви задаци временом су постали предмет Комбинаторике.

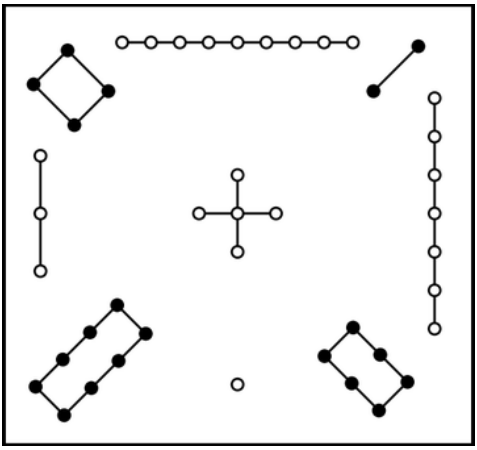
Многе проблеме било је лакше решавати увиђањем неких правилности и закључивањима која су се базирала на неким претходно провереним правилима. Почетне комбинаторне вештине коришћене су у веома широком спектру деловања. Од помоћи при прављењу планова за војне битке, до коришћења за разоноду у слободном времену.

Познато је да су међу предметима који су пре више од 3500 година остављени у пирамиди где је сахрањен египатски фараон Тутанкамон нађени остаци табле са фигурама за стару египатску игру *сенет*. Извесно је да се у то време ова игра играла правилима која ми не можемо знати, али за нас је корисно сазнање колико далеко историјски сежу подаци о томе када

су људи први пут почели користити неке логичке, мисаоне а самим тим и логичко комби-наторне игре.

Касније су се појављивале и друге комбинаторне, мисаоне игре: тавла, дама, шах, источна игра го и друге налик шаху. У свакој од тих игара, које су се и до данас одржале и знатно унапредиле свој положај и значај у свету, појављивале су се одређене комбинаторне конфигурације фигура којима су игране. Онај ко је боље познавао те конфигурације и ко се боље сналазио са њима, побеђивао би у игри. Разуме се, у давним временима, када се са овим почињало, није било конкретних комбинаторних задатака, каквим се математичари баве данас, али тај период је јако значајан као једна од почетних етапа у развоју комбинаторних идеја уопште.

Један од првих фрагмената блиских комбинаторици, а који је забележен у кинеским изворима од пре 4000 година, говори да је њихов цар Ју запазио, на брегу поред реке Лу, свету корњачу на чијем оклопу су били насликани симболи који су саржали беле и црне кружиће и за које се тврдило да представљају једноцифрене бројеве.



Из овога је изникла табела бројева:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ако се детаљније позабавимо овом бројевном мрежом запазићемо да је збир бројева у сваком реду, свакој колони или дијагонали једнак 15. Стари Кинези су оваквим квадратима бројева придавали мистична и натприродна својства, па се тако данас свака квадратна мрежа бројева за чије чланове важи да је њихов збир у сваком реду, колони или дијагонали једнак, назива*магичним квадратом.*

Из старогрчке математике, због уништавања чувене алекса-ндријске библиотеке и књига које би биле значајне за овај период, нема много конкретних података о њиховом бављењу комбинаториком, али неки исечци у виду изолованих података постоје и доприносе закључцима да су и стари Грци у свом бављењу математиком имали одређених комбинаторних идеја које су веома значајне у историјском контексту. Наиме, филозоф Ксенократ из 4.в. п.н.е. бавио се пребројавањем слогова у речима. Стоик Крисип из трећег века п.н.е. веровао је да се из система од десет аксиома може извести више од милион закључака. А по Хипарховом мишљењу потврдних закључака се може извести 103 049 а одричних 310 952. Потпуно је непознато како су они долазили до ових бројева, а нејасна си и правила по којима су они вршили ова комбинаторна пребрајања, а која су по свему судећи била погрешна. Међутим, неке конкретне комбинаторне проблеме Грци су решавали без грешака. Аристотел је прецизно пребрајао све трочлане силогизме, а његов ученик Аристоксен је прецизно бројао различите комбинације дугих и кратких слогове у песмама.

Грци су више пажње поклањали неким проблемима из теорије бројева а који садрже и комбинаторне елементе. У том послу незаобилазна је Питагорејска школа.Неким бројевима су давали божанска својства, а

нарочито се истицао број 36. Разлога је бар два, могао је бити представљен као збир кубова прва три природна броја или као збир прва четири парна и прва четири непарна броја:

$$36=1^3+2^3+3^3$$

$$36=(2+4+6+8)+(1+3+5+7)$$

А сличну одушевљеност изражавали су и такозваним савршеним бројевима, односно онима који се могу представити као збир својих чинилаца.На пример, 28 је био један од њих. Јасно је да је за проналажење таквих бројева и увиђање одређених законитости било потребно и нешто комбинаторне умешности или искуства. Они су се бавили и повезивањем својстава бројева са одређеним геометријским фигурама, као на пример троугловима и шесто-угловима. Све то је касније допринело развоју комбинаторне геометрије, а и других веома конкретних резултата у области теорије бројева и самој комбинаторици.

Негде од другог века п.н.е. почиње опадање науке у хеленистичким државама, а са њиме и криза самога друштва. Многи радови из тог времена били су заокупљени углавном мистичким својствима бројева. А после победе Хришћанства ова идеја се задржала у примеру повезивања јеретика са бројем 666, који је сматран симболом Антихриста. Међутим, чак и тако бескорисне идеје и студије ипак су давале смернице даљег развоја математике.

У кризним временима комбинаториком су се занимали и астролози, које су занимали распореди и комбинације планета како би на основу знања о томе закључивали о људским судбинама. Астролог бен Езра је 1140.године пребројао комбинације од по 2, 3 или више планета од њих 7. Он је тада знао да је број комбинација 3 планете од 7 једнак броју комбинација 4 планете од 7, што би ми савременим симболим записали са:

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$$

Формулу за биномне коефицијенте увео је и доказао јеврејски математичар Леви бен Гершон (14. век).

$$C_k^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}$$

Али пошто је рад остао непримећен у уском кругу обра-зованих људи тог времена, формулу је у истом облику, почетком 17.века објавио француски математичар Пјер Херигон. Наравно, нотација обележавања није била иста као данас. Она се временом мењала и „осавремењавала”.

Ни у старим азијским цивилизацијама није се седело скрштених руку. У осмом веку наше ере почео је процват арапске науке. Они су превели на свој језик многа грчка достигнућа и из њих учили, и на основу тога у многим областима и надмашили саме Грке. Посебне резултате Арабљани су постизали у алгебри. Решавајући питања о корену дошли су до формуле за степен збира два броја. Постоје назнаке да је ту формулу знао и велики арапски математичар и песник Омар Хајам, који је живео у 11.и 12. веку наше ере. Арапски научници су знали и за важну особину биномних коефицијената

$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$$

Упоредо са Арапима рачунањем биномних коефицијената бавили су се и кинески математичари. Они су у 13.веку саставили једну од таблица са биномним коефицијентима. Комбинацијама су нарочито били заинтересовани и у Индији. Они су још у 2.веку п.н.е. знали бројеве C_k^n и то да им је сума једнака 2^n. У 12. веку индијски математичар Бхаскара, написао је књигу „Сиданта Широмани” у чијем је делу „Лилавати” писао и о проблемима комбинаторике. Писао је о пермутацијама и варијацијама и њиховој вези при рачунању. Дао је и правила за рачунање пермутација и

комбинација неколико објеката, као и пермутација са понављањима.Арапска знања су касније продирала и у Европу, нарочито након освајања Шпаније. Европа је била упозната са арапским достигнућима у алгебри и десетичним системом за рачунање.Знања која су нудили Арапи користио је и Фибоначи. Његова ангажовања за математику у том периоду била су јако значајна. Фибоначијев рекурентни запис којим се следећи члан низа изражава збиром претходна два био је важан замајац у развоју комбинаторике. Нешто касније је метод рекурентних формула добио место једног од најмоћнијих апарата за решавање неких комбинаторних проблема.

Морамо напоменути, да комбинаторика, а са њом и теорија вероватноће, велику захвалност за своје постојање дугују коцкарским играма на срећу.Наравно, не само њима, већ и радовима великих математичара Паскала и Ферма, који су свако на свој начин учествовали у ударању савремених темеља ових дисциплина.

Паскалов троугао се први пут појављеује у том облику у његовом раду *Трактат о аритметичком троуглу*, објављеном 1665.након његове смрти. Наравно, саме биномне коефицијенте није открио Паскал, њихова историја је много дужа, а нешто од тога је и поменуто. Можда највећи посао, за то раздобље, урадио је Лајбниц својим делом *Dissertatio de Artta Combinatoria*, из 1666.године. У њој се први пут подробно излаже о принципима комбинаторике и одговарајућим формулама. Лајбниц је истицао да жели да створи општи метод помоћу кога ће све истине до којих се долази размишљањем моћи да се добију и некаквим рачуном. Касније је комбинаторика била занимљива и математичким великанима Бернулију и Ојлеру, чијим је радовима и доприносима она само могла постајати све заокруженија и кориснија наука.

Формуле које комбинаторика данас користи уз целу савремену нотацију добила је у 19.веку, са формализацијом алгебарске симболике.

У новије време комбинаторика добијаја на значају у спoју са техником и њеним достигнућима. Криптографија је незамислива без комбинаторике, а ни технолошки развој јер су му за оптимална решења потребни одговарајући комбинаторни прорачуни.

Вељко Ћировић

ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА УПИС НА ЕЛЕКТРОТЕХИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд, јун 2016

Тест има 20 задатака на две странице.Задаци 1-2 вреде по 3 поена, задици 3-7 вреде по 4 поена,задаци 8-13 вреде 5 поена,задаци 14-18 вреде по 6 поена,задаци 19-20 вреде по 7 поена. Погрешан одговор доноси по -10% од броја поена предвиђених за тачан одговор. Заокруживање Н не доноси ни позитивне ни негативне поене. У случају заокружибања више од једног одговора, као и не заокруживање ни једног одговора, добија је -1 поен.

1. Вредност израза $0.5^{1.5} \cdot 0.25^{0.5} \cdot 8^{-1.5}$ једнака је:

(А) 2^3 (Б) $\frac{1}{2^5}$ (В) $\frac{1}{2^7}$ (Г)$2^{1,5}$ (Д) 1 (Н) Не знам

2. Број реалних решења једначине $||1 - |x|| - 1| - 2 = 0$ једнак је:

(А) 0 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3 (Д) 4 (Н) Не знам

3.Дат је комплексан број $z = \frac{\sqrt{2016}}{\sqrt{2016}} \frac{+i^{2019}}{+i^{2017}}$,($i^2 = -1$). Тада је израз $\frac{z+\bar{z}}{2}$ (Где је $\bar{z}$ конјуговано комплексни број броја z) једнак:

(А)$\sqrt{2016}$ (Б)$-\sqrt{2016}$ (В) $\frac{2015}{2017}$ (Г) $\frac{2016}{2015}$ (Д) $\sqrt{2017}$ (Н) Не знам

4.Тетиве круга AB и CD, међусобно су нормалне и секу се у тачки M тако да је $AM = 3cm$, $MB = 4cm$, $CM = 2cm$ и $MD = 6cm$. Пречник тог круга је једнак (у cm):

(А) $8\sqrt{2}$ (Б) $\sqrt{75}$ (В) $\sqrt{65}$ (Г) 10 (Д) $2\sqrt{38}$ (Н) Не знам

5.У растућој аритметичкој прогрецији од 11 чланова, први,пети и једанаести члан чине прва три члана геометријске прогресије. Ако је први члан те

аритетичке прогресије 24, тада је збир свих чланова те аритметичке прогресије једнак:
(А) 249 (Б) 264 (В) 378 (Г)429 (Д) 501 (Н) Не знам

6. Ако је $\log_2(\sqrt{3}-1) + \log_2(\sqrt{6}-2) = A$, тада је израз

$\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{3}-1) + \log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{6}+2)$ једнак:

(А)-1 (Б) 2А (В) $2\text{А}-4$ (Г) $\frac{A}{2}-1$ (Д)$\sqrt{6}$А (Н) Не знам

7. Први извод функције $f(x) = \ln\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}$ у тачки $x_0 = 1$ једнак је:

(А) $\ln\sqrt{2}$ (Б)$\frac{1}{\ln\sqrt{2}}$ (В) $-\sqrt{2}$ (Г)$\sqrt{2}$ (Д) 1 (Н) Не знам

8.Дате су функције $f(x) = \frac{x-2016}{x+2016}$ и $g(x) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ тада је $f(g(x))$ једнако:

(А) $2016x$ (Б)$\frac{x-1}{x+1}$ (В) $\frac{1-x}{1+x}$ (Г) $1-2016x$ (Д) $2017x$ (Н) Не знам

9. Скуп свих вредности параметара a $(a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ тако да корени x_1 и x_2 квадратне једначине $ax^2+ax+1=0$ задовољавају неједначину $\frac{(x_1+1)^2+(x_2+1)^2}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2} \leq 1$ јесте:

(А)$(-\infty,-1) \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$ (Б) $(-\infty,0) \cup (\frac{2}{5},+\infty)$ (В) $(0,\frac{2}{5})$ (Г)$(-1,0) \cup (0,\frac{2}{5})$
(Д)$(0,+\infty)$ (Е) Не знам

10. У једнакокраком троуглу ABC је $AB = AC = b$ и $\sphericalangle BAC = 30°$. Тада је збир висина тог троугла једнак:
(А)$b(1+\sqrt{6})$ (Б) $\frac{b}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (В)$\frac{b}{4}(4+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (Г) $b(\sqrt{2}+\sqrt{6})$
(Д) $b(1+\sqrt{2}+\sqrt{6})$ (Е)Не знам

11. Ако су темена троугла тачке $(-8;4), B(-2;1)$ и $C(1;-3)$, а ортоцентар $H\ (x_0, y_0)$, тада је вредност разлике $y_0 - x_0$ једнака:

(А) 7 (Б) 6 (В) 5 (Г) 4 (Д) 8 (Н) Не знам

12. У развоју бинома $(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[6]{a}})^{\mathrm{n}}$ збир прва три биномна коефицијента је 121. Члан који садржи $\frac{1}{a}$ једнак је :

(А) $\frac{120}{a}$ (Б) $\frac{560}{a}$ (В) $\frac{455}{a}$ (Г) $\frac{322}{a}$ (Д) $\frac{155}{a}$ (Н) Не знам

13. Ако је полином $\mathrm{x}^{2016} + \mathrm{x}^{2015} - \mathrm{x}^{2014} + \mathrm{ax}^{2013} - \mathrm{b}x^2 + \mathrm{c}$ $(a, b, c \in R)$ дељив полиномом $\mathrm{x}^3 - \mathrm{x}$,тад је збир $4a^2 + 3\mathrm{b}^2 + 8\mathrm{c}^2$ једнак :

(А) 4 (Б) 3 (В) 12 (Г) 15 (Д) 18 (Н) Не знам

14. Дат је квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Дужине дијагонала страна овог квадра су $7, 8$ и 9. Суседна темена темену В A, C и B_1. Дужина висине из темена В пирамиде $ABCB_1$ једнака је :

(А) $\frac{12}{\sqrt{5}}$ (Б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (В) $\frac{2\sqrt{55}}{5}$ (Г) 3 (Д) 5 (Н) Не знам

15.Укупан број реалних решења система једначина $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{\mathrm{y}} = 1$, $x - \mathrm{y} = 2$, једнак је :

(А) 0 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3 (Д) 4 (Н) Не знам

16. Скуп свих реалних решења неједначине $\frac{|\log_3|2\mathrm{x}+3|| - 3}{\log_3 \mathrm{x}} > 0$ је облика (за неке реалне бројеве a, b, c, d такве да је $a < b < c < d$) :

(А) (a, b) (Б) $(a, b] \cup [c, d]$ (В) $(a, b) \cup (b, c)$ (Г) $(a, b) \cup (c, +\infty)$
(Д) $(a, b) \cup (b, c) \cup (d, +\infty)$ (Н) Не знам

17. На полици се налази 5 књига на енглеском , 7 на шпанском и 8 на француском језику. Све књиге су међусобно различите. На колико начина можемо распоредити књиге ако све написане на француском језику морају бити једна до друге ?

(А) $13! \cdot 8!$ (Б) $13 \cdot 8!$ (В) $13\binom{12}{5} + 7! \cdot 8!$ (Г) $\binom{20}{7}\binom{13}{8}$
(Д) ништа од претходног (Н) Не знам

18. Збир свих реалних решења једначине
$2\sqrt{x}\,4^{x} + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x}2^{x} + 4$ је :

(А) 5 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3 (Д) 4 (Н) Не знам

19. Изводнице праве кружне купе нагнуте су према равни основе купе под углом α , а у купу је уписана лопта. Вредност $tg\frac{\alpha}{2}$ тако да однос Vl/Vk (запремине лопте и запремине купе) има највећу могућу вредност, једнака је

(А) 3 (Б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (В) $\sqrt{2}$ (Г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Д) $\sqrt{3}$ (Н) Не знам

20. Укупан број решења једначине $\cos x + \cos 2x + 2\cos^2\frac{3x}{2} + \cos 4x$ на сегменту $[0,2\pi]$ једнак је:

(А) 2 (Б) 5 (В) 6 (Г) 9 (Д) 8 (Н) Не знам

РЕШЕЊА: 1. В 2. В 3. В 4. В 5. Г 6. Г 7. Г 8. В 9. Б 10. В 11. А 12. В 13. А 14. В 15. Б 16. Г 17. А 18. А 19. Б 20. Е

ОД ИГРЕ ДО НАУКЕ КРОЗ СВЕТ МАТЕМАТИКЕ

У периоду од октобра од децембра 2016. у Ваљевској гимназији спроведен је низ активности у оквиру пројекта „Од игре до науке кроз свет математике“ који је реализовала Подружница математичара Ваљево у сарадњи са Ваљевском гимназијом, а чији је покровитељ био Град Ваљево у оквиру свог *Локалног плана акције за децу*.

У осмишљавању активности пројекта и његовој реализацији водило се рачуна о потребама деце школског узраста, које надилазе редовне школске активности и класичну додатну наставу математике. У циљу подстицања развоја креативности, логичке интелигенције, правилног логичког мишљења и закључивања, као и развоја других позитивних компоненти личности потребно је предузимати низ активности које су усмерене ка помоћи деци школског узраста.

Посебно је значајно, ако се радом на подстицају развоја креативних појединаца успева утицати и на развој пожељних социјалних компоненти личности, подстицањем интеракција и заједничких активности ученика истих или сличних узрасних категорија и интересовања. Међу значајним проблемима савременог друштва је и однос деце према појединим новим технологијама, оличен у предугом провођењу времена у коришћењу рачунара и телефона у неедукативне сврхе. То често резултује одсуством потребне социјалне интеракције са вршњацима и уопште људима.

Математика и природне науке које су јој сродне, на најбољи начин подстичу активирање оних компоненти интелигенције ученика које су у непосредној вези са креативношћу, правилним логичким мишљењем и закључивањем. Традиционалне мисаоне игре на табли, као и занимљиви математички проблеми којима се врши попу-ларизција математике и науке уопште, могу позитивно утицати на развој пожељних социјалних карактеристика сваког појединаца, па тиме и деце школског узраста.

Организовањем научно популарних предавања и радионица о неким актуелним и интересантним темама може се битно појачати интересовање деце за стицање нових знања и умећа, као и подстаћи самосталан истраживачки рад у областима које се на тај начин представљају. Учешће деце школског узраста у такмичењима разних врста подстиче развој здравог такмичарског духа и компетитивности, а ово су веома значајне компоненте личности које таквим сматрају све традиционалне цивилизације.

Овај пројекат имао је за циљ да допринесе афирмацији дечијих права, слобода и да својим активностима једној групи младих заљубљеника у науку њу приближи на занимљиве начине и да их подстакне да самостално истражују. То „приближавање“ није могуће учинити једностраним и брзим акцијома којима је то циљ сам по себи, већ детаљно осмишљеним и припремљеним активнотима које се пажљиво примењују са циљем да мотивишу и заинтересују онога коме су намењене.

Програмске активности пројекта предвиђале су низ предавања у којима је покушано да се на занимљив начин широј јавности, а посебнмо ученичкој популацији учине доступним неки занимљиви нсегмени науке. Такође, одржана су такмичења у неколико мисаоних и спортских дисциплина која су резултовала издвајањем веома успешне групе ваљевских ђака који су бриљирали на такмчењима у брзом слагању Рубикове коцке, као и турнирима у шаху, отелу и решавању судокуа и логичких загонетки. За ученике основних школа уприличени су математички квизови на којима су учествовали ученици из 11 ваљевских школа, такичећи се у две категорије: млађи рзреди основне школе и старији разреди основне школе.

Кроз пројектне активности, или њихове делове, прошло је око 250 ученика из основних и средњих школа.

Резимеи научно-популарних предавања одржаних у току реализације

др Дејан М. Ђокић

Да ли се природа игра?

Закони физике или правила по којима се природа игра.

Сажетак

Да, природа се заиста игра! Не знамо тачно због чега „она“ то ради, да ли из доколице, неког вишег циља, какави су њени стратешки интереси и слично, али знамо каква су правила игре на основу физичких закона. Постојећа теорија игара коју је заокружио нобеловац John Forbes Nash је отишла даље од своје примене у економији - спустила се и у микросвет. Испоставља се да се игре природе у микросвету одвијају по чудесним законима квантне механике, што није случај код свакодневног макросвета који функционише по класичним принципима које је пре око три века формулисао Isaac Newton.

др Војислав Андрић

Од једне игре до алгоритама и теорије

Сажетак

Како се од магичних квадрата на којима се деца забављају и уче да сабирају до 15, може направити читава мала математичка теорија.
Биће представљени алгоритми за конструисање магичних квадрата непарног и парног степена.

Вељко Ћировић

Математика и традиционалне мисаоне игре на табли

Сажетак

Излагање ће садржати кратак историјски осврт на развој комбинаторних идеја и појаву традиционалних игара, као и апострофирање њихове нераскидиве везе са математичким принципима. Биће представљен едукативни значај појединих игара и наведена детаљна правила игре за традиционалне и веома распрострањене игре го, даму и манкалу.

Са једног од предавања

Детаљ са шаховског турнира

Подружница математичара Ваљево
Ваљевска гимназија

МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР
„ИНТЕГРАЛ КУП“
Ваљево, 03.12.2016.

Математички турнир ,,Интеграл куп" је математичко такмичење за ученике основних и средњих школа, од 7. разреда основне до 2. разреда средње школе и ревијално за ученике 6. разреда из Ваљева.

Покретачи и организатори турнира су Подружница математичара Ваљево и Ваљевска гимназија, а турнир је једна од програмских активности обележавања 30 година рада школе за љубитеље математике ,,Интеграл". Намера је да турнир постане традиционалан и да се одржава сваке школске године у првом полугодишту како би најуспешнији такмичари имали још једно припремно такмичење у овом делу године за значајна такмичења која следе.

Циљеви турнира су популаризација математике, приближавање науке младима, развој такмичарског духа и подршка талентима из различитих средина да се зближавају и учествују у заједничким активностима.

Подршку овом турниру даје Министарство просвете, науке и технолошког развоја Владе Републике Србије, кроз пројекат подршке организацијама значајним за образовање у Републици Србији за 2016. годину.

Турнир је одржан 03. децембра 2016. године.

Резултати ученика Ваљевске гимназије

Категорија 2
Јован Марковић VIII разред - I награда
Лука Цветиновић VII разред - II награда
Добрица Цветиновић VIII разред - III награда
Јанко Ђурић награда VIII разред - III награда
Лазар Јевтовић VII разред - III награда
Јелисавета Ненадовић VIII разред - III награда
Стеван Марјановић VIII разред - III награда

Категорија 3

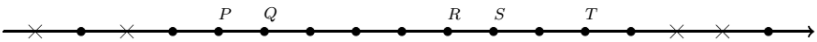
Нина Матић II_1- I награда
Михаило Тимотић I_1- II награда
Анђела Мишковић II_1- II награда
Саво Цвијетић I_1- III награда
Милош Миловановић II_1- III награда
Лазар Жујовић I_1- III награда
Никола Ненадовић I_1- III награда
Александар Станковић II_1- III награда

Задаци на турниру су подељени у три целине: (I) алгебра и бројеви, (II) геометрија и (III) комбинаторика. У оквиру сваке целине дата су по три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. За сваки задатак са вишеструким избором понуђено је по пет одговора од којих је само један тачан. Потребно је заокружити слово испред тачног одговора. Тачан одговор у задацима са вишеструким избором вреди 5 поена, а у осталим задацима по 15 поена. На тесту се може освојити највише 90 поена.
Време за израду задатака је 150 минута.

КАТЕГОРИЈА 1 – ШЕСТИ РАЗРЕД

(I) Алгебра и бројеви

1. На слици је приказан део бројевне праве, на којој су означени узастопни цели бројеви. Неке две од четири тачке означене са ×, одговарају бројевима који при дељењу са 4 дају остатке 1 и 2, а друге две одговарају бројевима који при дељењу са 5 дају остатке 1 и 2. Која од тачака P, Q, R, S или T одговара броју који при дељењу са 20 даје остатак 11?



(А) P (Б) Q (В) R (Г) S (Д) T

2. Збир неколико узастопних целих бројева је 2016. Највећи могући број сабирака је:
(А) 3 (Б) 6 (В) 4032 (Г) 4036 (Д) 8064

3. Збир и производ неколико природних бројева једнаки су n. Број n може бити:
(А) 23 (Б) 16 (В) 37 (Г) 59 (Д) ништа од понуђеног

4. Дешифровати множење

$$\overline{AA} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{ABC} = \overline{ABCABC},$$

где су A, B и C различите цифре.

(II) Геометрија

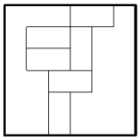
1. Ако је угао између симетрала два унутрашња угла троугла једнак 134°, онда је трећи унутрашњи угао тог троугла једнак:

(А) 46° (Б) 92° (В) 60° (Г) 136° (Д) 88°

2. Ако су углови α и β суплементни, а углови $\frac{\beta}{2}$ и $2016'$ комплементни, онда је α једнак:

(А) $64°48'$ (Б) $65°12'$ (В) $67°12'$ (Г) $68°48'$ (Д) $123°36'$

3. У квадрат површине $144\,\text{cm}^2$сложено је шест подударних правоугаоника као на слици. Колики је обим једног од тих правоугаоника?



(А) 18 (Б) 12 (В) 6 (Г) 9 (Д) 14

4. На продужетку странице AB троуглаABC, дата је тачка M тако да је тачка B између тачака A и M и важи $BM = BC$. Доказати да је права MC паралелна симетрали угла∠ABC.

(III) Комбинаторика

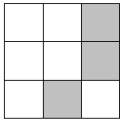
1. Пет ученика играју шаховски турнир на коме сваки играч са сваким игра по пет партија. Колико ће бити одиграно партија на турниру?

(А) 25 (Б) 50 (В) 75 (Г) 100 (Д) 125

2. У кутији се налази 50 лоптица обележених бројевима од 1 до 50. Којих лоптица има највише?

(А) Лоптица на којима је број већи од 4·4 и мањи од 4·4+4·4.
(Б) Лоптица са бројевима који су садржаоци броја 4.
(В) Лоптица чији бројеви нису прости и садрже цифру 4.
(Г) Лоптица на којима је број чији је збир цифара највише 4.
(Д) Лоптица на којима је број чији је производ цифара највише 4.

3. На колико различитих начина се могу осенчити три поља квадратне мреже 3x3? На наредној слици дат је пример једног таквог сенчења.



(А) 504 (Б) 729 (В) 81 (Г) 84 (Д) 168

4. Колико има четвороцифрених природних бројева чије је прва цифра паран број, друга цифра прост број, трећа цифра непаран број, а четврта цифра је дељива са 3?

КАТЕГОРИЈА 2 – СЕДМИ И ОСМИ РАЗРЕД

(I) Алгебра и бројеви

1. Најмањи природан број n за који је вредност израза $18^n \cdot \left(\frac{35}{810}\right)^3$ једнака природном броју је:

(А) 3 (Б) 4 (В) 5 (Г) 6 (Д) 7

2. Одредити највећи број сабирака за који је једнакост

$$\overline{ZV} + \overline{ZV} + \cdots + \overline{ZV} = \overline{ZVRK}$$

тачна. Различитим словима одговарају различите цифре, а истим словима исте цифре.

(А) 96 (Б) 107 (В) 108 (Г) 109 (Д) 210

3. За природан број n кажемо да је *„занимљив“* ако се може представити као $\frac{a \cdot b \cdot c}{d^2 \cdot e^2}$, где су a, b, c, d и e различити природни бројеви. Колико има једноцифрених *„занимљивих“* природних бројева?

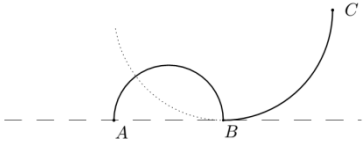
(А) 5 (Б) 6 (В) 7 (Г) 8 (Д) 9

4. Одредити најмањи природан број n, такав да је $3n$ трећи степен неког природног броја, а $4n$ четврти степен неког природног броја.

(II) Геометрија

1. Линија на слици је стаза кретања муве од тачке A до тачке C. Стаза се састоји од два кружна лука, први од A до B је полукружница, а други од B до C је четвртина кружнице чија је права AB тангента. Ако је најкраће растојање од A до C једнако $10\sqrt{2}$m, а полупречник

лука BC дупло већи од полупречника лука AB, колико је приближно једнак збир полупречника ова два лука, мерено у дециметрима?



(А) 91 (Б) 92 (В) 93 (Г) 94 (Д) 95

2. У осмоуглу $ABCDEFGH$ је $GH = 6\ cm$, а све остале странице су по $2\ cm$. Шест његових унутрашњих углова су по 90 °, а два по 270 °. Површина петоугла $ADFGH$ изражена у cm^2 је:
(А) 10 (Б) 14 (В) 18 (Г) 22 (Д) 24

3. Дужине две странице неког троугла су $7\frac{1}{5}$ и 9, а збир дужина висина које одговарају тим страницама једнак је дужини треће висине. Дужина треће странице тог троугла је:
(А) 3,2 (Б) 4,0 (В) 4,2 (Г) 5,0 (Д) 5,2

4. Дат је трапез $ABCD$ (чије су основице AB и CD) обима 2016 и кружнице k_1 и k_2, чији су пречници краци BC и AD, редом. Нека су $\mathrm{M} \in k_1$ и $\mathrm{L} \in k_2$ произвољне тачке ових кружница, колика је највећа могућа дужина дужи ML?

(III) Комбинаторика

1. Осам играча играју свако са сваким по две партије шаха. Сваки играч за победу осваја 1 поен, за реми 0,5 поена, а за пораз се не добијају поени. Колико најмање поена треба да има неки играч да би се закључило да он сигурно има више поена од свих осталих играча појединачно?

(А) 7,5 (Б) 8 (В) 11,5 (Г) 13,5 (Д) 14

2. На колико начина 5 људи може да се смести у 7 хотела?
   (А) 12785 (Б) 16780 (В) 16807 (Г) 78125 (Д) 78160

3. Колико има петоцифрених природних бројева чије су суседне цифре различите?
   (А) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ (Б) $9 \cdot 8^4$ (В) 9^5 (Г) 8^5

4. Колико има четвороцифрених природних бројева дељивих са 4, којима су све цифре различите?

КАТЕГОРИЈА 3 – ПРВИ И ДРУГИ РАЗРЕД

(I) Алгебра и бројеви

1. Функција $B : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ слика број n у број цифара броја n. Одредити колико је
   $$B\left(B\left(\left(B\left(B\left(2015^{2016}\right)\right)\right)^{2017}\right)\right).$$
   (А) 2 (Б) 3 (В) 4 (Г) 5 (Д) 6

2. Реконструисати дато дељење, а затим одредити колики је производ, не обавезно различитих, цифара А и В.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
 & * & * & A & B & * & * & : & * & * & * & = & * & 8 & * \\
- & * & * & * & * & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & * & * & * & & & & & & & & & \\
 & & - & * & * & * & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & * & * & * & * & & & & & & & & \\
 & & - & * & * & * & * & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & & & & & & & \\
\end{array}
$$

(А) 0 (Б) 6 (В) 8 (Г) 42 (Д) 45

3. Збир k $(k \geq 1)$ узастопних природних бројева је једнак 66. Број различитих вредности за k је:
   (А) 0 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3

4. Доказати да за сваки природан број kпостоји $2k+1$ узастопних природних бројева, таквих да је збир квадрата првих од тих $k+1$ бројева једнак збиру квадрата наредних k бројева.

(II) Геометрија

1. Правоугаона трака страница $2\ cm$ и $10\ cm$ савијена је два пута као на слици. За колико је површина добијене фигуре мања од површине правоугаоне траке?

   (А)$2\ cm^2$ (Б)$3\ cm^2$ (В)$4\ cm^2$ (Г)$1\ cm^2$ (Д)$5\ cm^2$

2. Ако је у троуглу ABC угао β туп и $AC = AH$ (H ортоцентар троугла). Колика је мера угла $2\alpha + \gamma$?
   (А)$45°$ (Б)$150°$ (В)$60°$ (Г)$120°$ (Д)$90°$

3. Ако се број страница правилног моноугла повећа за 6, његов унутрашњи угао се повећа за $10°$. За колико се повећа број дијагонала?
   (А)35 (Б)117 (В)50 (Г)92 (Д)81

4. Дата је права p и тачке A и B са исте стране праве p, као на слици. Конструисати на правој p тачку X, такву да је оштар угао који образују права p и права одређена тачкама B и X дупло мањи од оштрог угла који образују права p и права одређена тачкама A и X.

(III) Комбинаторика

1. Природних бројева који имају бар две цифре и код којих је свака цифра мања од претходне има:

(А)1023 (Б)1013 (В)$9!$ (Г)1024 (Д)$9! - 10$

2. Број различитих начина на које могу да се изаберу два несуседна двоцифрена природна броја је:

(А) 3826 (Б) 3827 (В) 3915 (Г) 3916 (Д) 3960

3. Колико има бијекција које пресликавају неке непарне природне једноцифрене бројеве у неке непарне природне једноцифрене бројеве?

(А) 1545 (Б) $1! + 2! + 3! + 4! + 5!$ (В) 1520 (Г) $5! \cdot 15$ (Д) 1225

4. Колико има симетричних бинарних релација дефинисаних на скупу који има 2016 елеманата?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА
КАТЕГОРИЈА 1 – ШЕСТИ РАЗРЕД
(I) Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**А**	**В**	**Б**

Задатак 4. Како је $\overline{ABCABC} = 1001 \cdot \overline{ABC}$, а $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то је једино могуће решење, с обзиром да су A, B и C различите цифре,

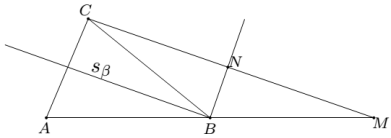
$$A = 7, B = 1, C = 3.$$

(II) Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**Д**	**В**	**Б**

Задатак 4. Троугао BMC је једнакокраки, па је симетрала $\measuredangle MBC$ истовремено и висина која одговара страници MC. Дакле, важи $BN \perp MC$.

За троугао ABCугао $\measuredangle MBC$ је спољашњи и BN, као његова симетрала, нормална је на симетралу угла $\measuredangle ABC$, одакле следи да су MC и s_β паралелне.



(III) Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**Б**	**Д**	**Г**

Задатак 4. Прва цифра може бити из скупа $\{2,4,6,8\}$, друга из скупа $\{2,3,5,7\}$, трећа из $\{1,3,5,7,9\}$ и четврта из скупа $\{0,3,6,9\}$, тако да оваквих бројева има укупно $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 320$.

КАТЕГОРИЈА 2 – СЕДМИ И ОСМИ РАЗРЕД

(I) Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**Г**	**В**	**Д**

Задатак 4. Како је $3n$ трећи степен природног броја, то је број појављивања сваког простог чиниоца у $3n$ дељив са 3. Дакле, број појављивања простог чиниоца 3 у n при дељењу са 3 даје остатак два (да би у $3n$ био дељив са 3), а број појављивања сваког другог простог чиниоца у n је дељив са 3. Како је $4 = 2 \cdot 2 \cdot n$ четврти степен природног броја, то је број појављивања сваког простог чиниоца у $4n$ дељив са 4.

Дакле, број појављивања простог чиниоца 2 у n при дељењу са 2 даје остатак 2, а број појављивања сваког другог простог чиниоца у n је дељив са 4. Како се тражи најмањи број n, закључујемо да n, осим 2 и 3, нема других простих чинилаца.

Одатле следи да број чинилаца у n који су једнаки 3 мора при дељењу са 3 дати остатак 2 и бити дељив са 4. Најмањи такав број је 8. Слично, број чинилаца у n који су једнаки 2 мора бити дељив са 3, а при дељењу са 4 дати остатак 2. Најмањи такав број је 6. Према томе, тражени број је $n = 2^6 \cdot 3^8$.

(II) Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**Д**	**В**	**Б**

Задатак 4. Означимо са P средиште крака BC, а са Q средиште крака DA. Јасно да су овако изабране тачке P и Q центри одговарајућих кружница из задатка. Користићемо следећу једноставну чињеницу:

За произвољне три тачке P, Q, R *важи да је* $PR \leq PQ + QR$, *при чему једнакост важи само ако су ове три тачке колинеарне и* Q *је између* P *и* R.

Дакле,

$$\begin{aligned} ML &\leq MP + PL \leq MP + PQ + QL \\ &= \frac{BC}{2} + \frac{AB + CD}{2} + \frac{AD}{2} \\ &= \frac{AB + BC + CD + DA}{2} \\ &= \frac{2016}{2} = 1008. \end{aligned}$$

Одатле закључујемо да ML не може бити веће од 1008, као и да је једнако 1008 само ако су тачке M, P, Q, L колинеарне и P је између M и L, а Q између P и L. Права PQ сече кружнице k_1 и k_2 јер пролази кроз њихове центре, па ако за M и L узмемо оне пресеке праве PQ и кружница k_1 и k_2 који се налазе у спољашњој области трапеза, имамо да је $ML = 1008$.

(III) Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**Г**	**В**	**В**

Задатак 4. Број је дељив са 4 ако и само ако је његов двоцифрени завршетак дељив са 4. Пошто се траже бројеви са различитим цифрама,могући двоцифрени завршеци су:

$04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 92, 96.$

У случајевима када се појављује цифра 0 (има их 6), прве две цифре бирамо на $8 \cdot 7 = 56$ начина, а у осталих 16 случајева прве две цифре бирамо на $7 \cdot 7 = 49$ начина.

Дакле, тражених бројева има укупно $6 \cdot 56 + 16 \cdot 49 = 1120$.

КАТЕГОРИЈА 3 – ПРВИ И ДРУГИ РАЗРЕД

(I) Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**В**	**А**	**Д**

Задатак 4. Нека је k произвољан природан број. Тада сваких $2k + 1$ узастопних природних бројева можемо записати на следећи начин:

$$n - k, \dots, n - 1, n, n + 1, \dots, n + k \quad (*)$$

за неки природан број n који је већи од k.

Након сређивања, добија се да је једнакост

$$(n - k)^2 + \cdots + (n - 1)^2 + n^2 = (n + 1)^2 + \cdots + (n + k)^2$$

еквивалентна с једнакошћу $n = 2k(k + 1)$.

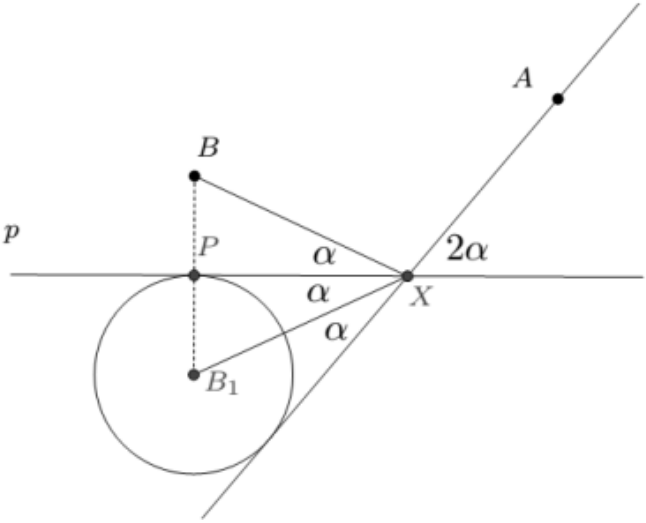
Ако за n узмемо природан број $2k(k + 1)$, онда ће важити $n > k$ и $n = 2k(k + 1)$, па ће за бројеве $(*)$ важити тврђење задатка.

(II) Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**В**	**Д**	**Д**

Задатак 4. Нека је тачка B_1 симетрична тачки B у односу на праву p. Опишимо круг са центром у B_1коме је права p тангента и на овај круг конструишемо тангенту из тачке A. Тачка пресека праве p и ове тангенте је

тражена тачка X. Нека је P подножје нормале из тачке B на p, сада је $\measuredangle BXP = \measuredangle PXB_1 = \measuredangle B_1XQ$.



(III) Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**Б**	**Г**	**А**

Задатак 4. Због симетричности таблица симетричних релација, елементи записани изнад главне дијагонале одређују и елементе испод главне дијагонале. Како се главна дијагонала може произвољно попунити, то места у таблици која одређују ову релацију има $1 + 2 + \cdots + 2016 = \frac{2017 \cdot 2016}{2} = 2017 \cdot 1008$. Како се на сваком месту може уписати $\perp$ или $\top$, оваквих релација има укупно $2^{2017 \cdot 2018}$.

САДРЖАЈ

„МЛАДИ МАТЕМАТИЧАР” је лист за ученике средњих школа.

Тираж броја је 500 примерака.

ИЗДАВАЧ

Ваљевска гимназија, Вука Караџића бр. 3

14000 Ваљево Тел-факс: 014/221-622

www.valjevskagimnazija.edu.rs e-mail: gimvaljevo@gmail.com

РЕДАКЦИЈА

Главни и одговорни уредник: Маријана Стефановић, професор математике

Ученици сарадници: Ђорђе Трифуновић II_1, Милош Миловановић II_1, Данко Пиргић II_1, Александар Станковић II_1, Милена Видић IV_1