Млади математичар

БРОЈ 25. • ГОДИНА XXV • ЈУН 2012.

ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

Млади математичар

БРОЈ 25. • ГОДИНА XXV • ЈУН 2012.

ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

Пјер де Ферма

Пјер де Ферма –француски математичар баскијског порекла.Рођен је 17. августа 1601. у Бомон-де-Ломању, југозапад Француске. Одрастао је у породици са четворо деце, с обзиром да су његови родитељи осим њега имали још једног сина и две кћерке. Доминик Ферма, Пјеров отац, био је богати трговац кожом и други конзул Бомон-де-Ломања, тако да је, захваљујући статусу своје породице, Пјер добио најбоље образовање. Школовао се при фрањевачком манастиру у Фрамдселву, а затим студирао на универзитетима у Тулузу, Орлеану и Бордоу. Завршио је права. На инсистирање своје породице, окренуо се каријери у у државној служби, те је 1631. изабран за намесника у градској скупштини, у одељењу за петиције.Показавши се као ефикасан и способан службеник, који је врло савесно обављао своје дужности, брзо је напредовао и као знак да је уважени члан друштва добио је де у свом имену. Његов напредак био је и више него вртоглав, од обичног службеника у доњем дому седам година након ступања у службу, 16. јануара 1638.именован је на виши положај, да би 1652.био унапређен на највишем нивоу кривичног суда.

Своје слободно време посвећивао је математици, било самосталном раду, било сарадњи са другим експертима у овој области. Осим математике, занимао се и за стране језике, класичну књижевност и древну науку.Имао је и необичан ,,хоби", тј. обожавао је да заголица машту других математичара, шаљући им писма са својим најновијим теоремама, али без пратећег доказа.Такав поступак често је изазивао негодовање и бес код многих његових колега.Рене Декарт,његов савременик од кога је Пјер независно открио основе аналитичке геометрије,а који је и сам вршио слична истраживања, називао га је хвалисавцем.

Када је 1636. отишао у Париз направио је контакт са Мерсеном и његовим сарадницима.

Прво писмо које му је послао састојало се од два проблема, за која је Пјер питао Мерсена да их постави париским математичарима.У том писму његов стил био је врло препознатљив , изазивао је друге да пронађу решења, која је он већ нашао.Чувени математичар, отац Марин Мерсен, приметио је да су проблеми доста тешки и да постојеће технике нису довољне за њихово решавање. Замолио је Пјера да му открије своје, те су се већ у следећем писму нашле методе за одређивање максимума, минимума и тангенти.

Ферма је веровао да ако функција f(x) има максимум или минимум за одређену вредност x, узимајући неки екстремно мали број e, може се рећи да је вредност функције f(x-e) приближно једнака вредности функције f(x). Он је раније покушао да пронађе податке о томе како је ова једначина настала, што му је омогућило да напредује у даљем истраживању. Но, морао је да примени сасвим једноставну претпоставку, да је e једнако нули.

Кроз свој рад на својствима кривих, Ферма је од једначина за обичну параболу $a^y = x^2$ и правоугаону хиперболу $x^y = a^2$ направио универзалну једначину $a^n - 1^y = x^n$. Криве утврђене по овој једначини познате су као Фермаове параболе или хиперболе, у зависности од тога да ли је n позитивно или негативно.

Пјер је успео да дође до значајних открића и у физици. У опису слободног пада који је написао Галилеј пронашао је извесне грешке. Но, без обзира на резултате које је постизао у другим областима, увек се радије препуштао доказивању различитих геометријских теорема. За разлику од својих колега, који су радо објављивали своја истраживања, Пјер то није желео да учини. Но ипак, научник кога је он доста ценио и са којим је открио прве доказе и утврдио изразе у теорији вероватноће, Блез Паскал, успео је да га убеди да свету представи своју генијалност. Де Ферма је пристао, али са захтевом да његови радови буду без потписа не желевши да га критике читалаца омету у даљем раду.

Да је заиста математичар вредан дивљења, Пјер је показао још као студент, када је 1629. рестаурирао Аполонијево дело „Plane loci" („ Значајне тачке у равни ").

Током његовог даљег развоја у овој области, као резултат уложеног труда уследила су многа открића и теореме, од којих су неке успеле да из темеља промене науку. С обзиром да му примарно занимање није била математика, међу колегама је сматран аматером. Због огромног талента називали су га „Принцем аматера".

Ферма је, наиме био укључен и у стварање калкулуса.Калкулус је део математике који се бави функцијама, изводима, интегралима ,бесконачним низовима и лимесима.

Познат је и као диференцијални и интегрални рачун. Калкулус пружа могућност израчунавања количине промене једне величине у односу на другу.Своју примену нашао је у слању ракета на Месец.

Пјер де Ферма умро је 12. јануара 1665. у Кастреу.Његов портрет који је насликао Роланд Лефевр налази се у Градском музеју у Нарбону, Француска.

Значајне тачке Фермаовог рада су и: пријатељски бројеви, Мала Фермаова теорема, Велика Фермаова теорема (Последња Фермаова теорема).

Део проучавања на многим универзитетима
Методе за одређивање максимума, минимума и тангенти

Цела теорија студије максимума и минимума састоји се од избора две непознате a и e било ког степена.

Нека је AC нека дуж.На њој одредимо тачку E и претпоставимо да је AE*EC максимум. Ако је AC = b, AE =a, онда је очигледно EC=b-a. Производ који смо означили као максимум једнак је $ba-a^2$. Сада узмемо да је AE=a+e, тада је EC=b-a-e. Производ ова два дела дужи AC биће $ba-a^2+be-2ae-e^2$. Да би то било једнако $ba-a^2$ потребно је да be буде сразмерно $2ae+ e^2$, односно да b буде сразмерно 2a+e. С обзиром да је e екстремно мала вредност следи да је b=2a. Да би се решио овај проблем, дакле, мора се узети половина од b.

Мала Фермаова теорема

Мала Фермаова теорема има два облика:
1) Ако је p прост број, онда за сваки цео број a важи да је a^p –a дељиво са p.
2) Ако је p прост број и a цео број који није дељив са p тада важи да је a^{p-1}-1 дељиво са p.
Примена ове теореме састоји се у томе да на основу ње можемо одредити да ли број има предиспозиције да буде прост. Узимамо вредности броја a тако да је a веће или једнако 1, а мање од p и проверавамо да ли важе горе наведени облици теореме. Уколико то није случај, закључујемо да је број сложен. Међутим и овај тест има своје мане.Није сасвим прецизан и тачан.

Пјер де Ферма није дао доказ ове теореме, први који је то учинио био је немачки математичар Готфрид Вилхем фон Лајбниц, у рукопису без датума, али је сам Лајбниц написао поред да је знао доказ пре 1683.године.

Велика Фермаова теорема

Велика Фермаова теорема, названа и Последња Фермаова теорема по томе што је последња добила доказ, више од три века мучила је математичаре широм света. Наизглед једноставна, а заправо врло тешка, у Фермаовом стилу голицала је машту доста експерата док на крају 1995. британски математичар Ендру Вајлс (рођен 1953.) и његов бивши студент Ричард Тејлор (рођен 1962.) нису објавили цео доказ, чиме су напокон решили један од најпознатијих математичких проблема. Доказ је био публикован у часопису „Математички анали" на више од сто страна.
Али ево како је настала ова чувена теорема и од чега се она састојала.

Читајући једну од својих омиљенијих књига, Диофантову „Аритметику"Пјер је наишао на део са Питагорином теоремом и Питагориним тројкама. У тренутку огромне генијалности или пак чисте радозналости дошао је на идеју да би ако постоје бројеви који задовољавају $x^2+y^2=z^2$ онда морали да постоје и бројеве који би задовољавали једначину $x^3+y^3=z^3$. А зашто уместо броја три не би стајао број четири или пет, шест, седам? И тако је одлучио да постави следећу једначину:
$x^n+y^n=z^n$ где n је n природан број већи од 2. Убрзо је открио да таква једначина не може имати решење и на свом примерку Диофантове „Аритметике" записао је 1637.

„Међутим, немогуће је куб броја написати као збир кубова два броја, ни биквадрат броја као збир биквадрата два броја и уопште никакав степен већи од квадрата не може се написати као збир друга два броја истог тог степена. Открио сам заиста изузетан доказ за то, али сувише је велики да би стао на ову малу маргину."

Пошто се касније показало да је теорема истинита за многе вредности n, што је довело до многих значајних открића у математици, тежина овог проблема довела је и до тога да велики број математичара посумња у то да је Пјер де Ферма заиста имао доказ ове теореме.Како било, ова теорема и целокупан Фермаов рад доста су допринели развоју и побољшању математике као науке чија је важност и примена неприкосновена.

Јелена Марковић I-1

Нелинеарне Диофантове једначине

Диофантовом једначином називамо алгебарску једначину са две или више непознатих са целобројним коефицијентима, у којој се траже целобројна (најчешће) или пак рационална решења. Линеарном Диофантовом једначином са n непознатих називамо једначину облика

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

где су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ непознате, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ целобројни коефицијенти. На пример $2x + 3y = 7$ је линеарна Диофантова једначина са две непознате. Све Диофантове једначине које нису линеарне називамо нелинеарним Диофантовим једначинама. У њима се непознате појављују у члановима вишег реда, као на пример у једначини

$$x^2 + 2y^3 = 8$$

где се непознате x и y појављују у члановима другог, односно трећег реда. У овом тексту ће бити приказане неке елементарне методе решавања нелинеарних Диофантових једначина. Заједнички део свих тих метода је метода разликовања случајева. Једначина се најчешће прво мора написати у одговарајућем облику, да би се кроз разликовање допуштених случајева могао сузити скуп потенцијалних решења и коначно наћи сама решења. У зависности од тога какав запис једначине користимо, или пак по којој основи разликујемо случајеве добијамо различите (под)методе за решавање нелинеарних Диофантових једначина. Неки од задатака који следе могу се решити на више начина, користећи разне методе, или пак комбинације неколико метода. На читаоцу остаје да открије те друге путеве у решавању задатака, или можда да барем неко постојеће решење "олакша" и учини елегантнијим.

Метода факторизације

Метода факторизације састоји се у томе да се једна страна једначине напише у облику производа целобројних вредности, па узимајући у обзир другу страну једначине посматрамо могуће случајеве.

Задатак 1. Наћи сва целобројна решења једначине

$$2x^2 + xy - 3y^2 = 17$$

Решење: Леву страну једначине напишемо у облику производа два цела броја:

$2x^2 + xy - 3y^2 = 2x^2 + 3xy - 2xy - 3y^2 = x(2x + 3y) - y(2x + 3y) = (2x + 3y)(x - y)$,

па разликујемо следеће случајеве:

I	$2x + 3y = 17,$	$x - y = 1;$
II	$2x + 3y = 1,$	$x - y = 17;$
III	$2x + 3y = -17,$	$x - y = -1;$
IV	$2x + 3y = -1,$	$x - y = -17.$

Решавањем система у случају **I** добијамо $x = 4, y = 3$; у случају **II** $y = -33/5 \notin Z$, у случају **III** $y = 19/5 \notin Z$, и у случају **IV** $y = 33/5 \notin Z$. Према томе имамо само једно решење $x = 4, y = 3$.

Задатак 2. Одредите све природне бројеве n за које је $n^2 - 4n + 16$ потпун квадрат неког природног броја.

Решење: За неки природан број m мора да важи:

$$m^2 = n^4 - 4n + 16 = n^2 - 4n + 4 + 12 = (n-2)^2 + 12.$$

Како су збир и разлика два цела броја увек исте парности (у овом случају то су бројеви m и n-2), па је $m + n - 2 \geq 0$ (због $m, n \geq 1$), разликујемо два случаја:

I	$m + n - 2 = 2,$	$m - n + 2 = 6;$
II	$m + n - 2 = 6,$	$m - n + 2 = 2.$

У првом случају добијамо $m = 4, n = 0$, а у другом $m = 4, n = 4$. Како нула није природан број, имамо само једно решење $n = 4$.

Метода количника

Основна идеја ове методе слична је као код методе факторизације, само што сада једну страну једначине записујемо у облику разломка две целобројне вредности, док са друге стране једначине имамо такође целобројну вредност. Због тога именилац тог разломка мора делити бројилац, што нам даје класификацију могућих случајева. Споменути разломак у пракси најчешће добијамо када се једна непозната изрази као рационална функција друге.

Задатак 3. Наћи све природне бројеве n за које $n + 2$ deli $n^4 + 2$.

Решење: Треба наћи природне бројеве n за које је и 22₄++*nn* природан број. Будући да је

$$\frac{n^4+2}{n+2} = \frac{n^4+2n^3-2n^3-4n^2+4n^2+8n-8n-16+16+2}{n+2}$$

$$= \frac{n^3(n+2)-2n^2(n+2)+4n(n+2)-8(n+2)+18}{n+2}$$

$$= \frac{(n+2)(n^3-2n^2+4n-8)+18}{n+2} = n^3-2n^2+4n-8+\frac{18}{n+2},$$

потребно је и довољно да је $\frac{18}{n+2}$ природан број. Узимајући у обзир да је $n + 2 \geq 3$ следи да је $n + 2 \in \{3, 6, 9, 18\}$, односно $n \in \{1, 4, 7, 16\}$.

Метода збира

Метода збира је слична методи факторизације, само што сада једну страну једначине записујемо у облику збира (најчешће ненегативних) целих бројева, и даље дискутујемо случајеве који могу наступити.

Задатак 4. Да ли постоје два цела броја са својством да је њихова сума двоструко мања од суме њихових квадрата?

Решење: Означимо ли та два броја са x и y тада важи

$$x^2 + y^2 = 2\,(x + y\,)$$

или другачије записано

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$$
$$(x\text{-}1)^2 + (y\text{-}1)^2 = 2.$$

Једини начин да се број 2 напише као сума квадрата двају целих бројева је као сума две јединице, па следи да је $(x\text{-}1)^2 = (y\text{-}1)^2 = 1$, односно $x\text{-}1 = \pm 1 = y\text{-}1$. Сада лако добијамо да су x и y једнаки 0 или 2, те су парови бројева који задовољавају захтев задатка дати скупом $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$.

Метода остатака

Методе производа, количника и збира су користиле сличну идеју да се различитим трансформацијама једначина (или њен део) запише у одговарајућем облику (производа, количника односно збира), па се тај запис користи као база за испитивање могућих случајева. Метода остатака користи другачију идеју: разликовање случајева се врши испитивањем остатака које дају делови једначине при дељењу са неким целим бројем (најчешће неким од бројева 2, 3, 4, 5, 10), и њиховим упоређивањем.

Метода последње цифре

Метода последње цифре је подметода методе остатака која се користи за испитивање остатака при дељењу бројем 10. Прецизније, раздвајање случајева се врши посматрањем последње цифре неких делова једначине и њиховим усклађивањем.

Задатак 5. Нађите целобројна решења једначине

$$5^x + y^4 = 194482.$$

Решење: Ако је $x < 0$ тада 5^x није цео број, а како y^4 и 194482 то јесу, следи да у овом случају нема решења. Ако је $x = 0$ онда је $y^4 = 194481$, што повлачи да је $y = 21$. Ако је $x > 0$ тада се 5^x завршава цифром 5, па будући да се y^4 обавезно завршава неком од цифара 0, 1, 5, 6, то следи да се $5^x + y^4$ мора завршавати једном од цифара 5, 6, 0, 1. Како се 194482 завршава цифром 2, то следи да у овом случају нема решења. Дакле једино решење је $x = 0$, $y = 21$.

Метода парности

Метода парности је такође подметода методе остатака која користи испитивање остатака при дељењу бројем 2. Најчешће се разликују два случаја: када је нека од непознатих парна, односно непарна, па се одвојено врше даља испитивања.

Задатак 6. Постоје ли цели бројеви m и n који задовољавају једначину

$$n^4 + 16m = 7993 \ ?$$

Решење: Ако би n био паран број тада би лева страна једначине такође била парна, а како је 7993 непаран, то не бисмо имали решења. Стога је, ако решење постоји, обавезно $n = 2k + 1$ за неки цео број k. Уврстимо ли тај израз у нашу једначину добијамо:

$$\begin{aligned} (2k+1)^4 + 16m &= 7993 \\ (4k^2 + 4k + 1)^2 + 16m &= 7993 \\ 16k^4 + 16k^2 + 1 + 32k^3 + 8k^2 + 8k + 16m &= 7993 \\ 8\,(2k^4 + 2k^2 + 4k^3 + k^2 + k) + 16m &= 7992 \quad | : 8 \\ 2\,(k^4 + k^2 + 2k^3 + m) + k\,(k+1) &= 999. \end{aligned}$$

Будући да је производ два узастопна цела броја увек дељив са 2 (дакле 2 дели $k(k+1)$), то следи да је цела лева страна у задњој једнакости парна. Како је 999 непаран, значи да једначина нема целобројних решења.

Метода карактеристичних остатака

Посматрају се остаци при дељењу било којим целим бројем (осим већ дискутованих 2 и 10).

Задатак 7. За које целе бројеве x и y број $x^4 + y^4$ при дељењу са 25 даје остатак 3?

Решење: Тражимо бројеве x и y такве да је $x^4 + y^4 = 25\mathrm{m} + 3$ за неки $\mathrm{m} \in Z$. Уочимо да тада $x^4 + y^4$ и при дељењу са 5 даје остатак 3.

Погледајмо сада какве остатке при дељењу са 5 може давати четврти степен целог броја:

I $x \equiv 0 \pmod 5 \quad \Rightarrow \quad x^4 \equiv 0 \pmod 5$;
II $x \equiv \pm 1 \pmod 5 \quad \Rightarrow \quad x^4 \equiv (\pm 1)^4 = 1 \pmod 5$;
III $x \equiv \pm 2 \pmod 5 \quad \Rightarrow \quad x^4 \equiv (\pm 2)^4 = 16 \equiv 1 \pmod 5$.

Дакле, x^4 и y^4 при дељењу са 5 могу дати само остатке 0 или 1, па онда $x^4 + y^4$ при дељењу са 5 може давати остатке 0, 1 и 2, а никако 3. Следи да тражени цели бројеви не постоје.

Метода неједнакости

Ова метода се често користи да би се смањио скуп могућих решења дате једначине, а затим се на том смањеном скупу разликују случајеви. Метода неједнакости се често користи и у комбинацији с неком другом методом за решавање нелинеарних Диофантових једначина.

Задатак 8. Наћи све природне бројеве a, b и c за које је $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Решење: Уочимо прво да сваки од тражених бројева мора бити већи од 1. Без смањења општости, нека је $1 < a \le b \le c$. Тада из

$$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\otimes\frac{3}{a}$$

Следи да је $a \le 3$, односно a може бити 2 или 3.

Ако је $a = 2$, тада из $\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\otimes\frac{2}{b}$

следи да је $b \le 4$, односно b може бити један од бројева 2, 3, 4. Сада се лако израчуна да $b = 2$ води ка контрадикцији ($01=c$); $b = 3$ даје $c = 6$; док из $b = 4$ добијамо $c = 4$. Ако је $a = 3$, тада из

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\otimes\frac{2}{b}$$

следи да је $b \le 3$, па је (због $3 = a \le b$) нужно $b = 3$, па лако добијамо и $c = 3$. Дакле, укупно имамо три решења (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3).

Никола Трифуновић III-1

Лепота математике

У току векова дато је пуно одговора о томе шта је математика.

Глилеј о математици каже : „Свет је књига писана језиком математике, а лица су троуглови, кругови и друге геометријске слике, без којих се човечја реч не може схватити, без њих се узалудно лута кроз тамни лавиринт.”

Да би постао добар математичар мораш бити отвореног ума, јер Декарт каже: „Никад нећемо постати математичари, чак и ако знамо напамет све туђе доказе, ако наш ум није способан да самостално решава било какве проблеме.”

Слично виђење има и Вајерштрас: „Математичар који није помало и песник неће никада бити потпун математичар.”

А Алберт Ајнштајн поставља питање: „Како је могуће да математика, која је производ људске мисли, независна од искуства, буде тако дивно прилагођена предметима стварности? По мом мишљењу, уколико се ставови математике односе на реалност, нису сигурни, а уколико јесу, не односе се на реалност.”

Лепоту математике у потпуности одређују реченице Владимира Девидеа: „Права математика је увек била лепа, а права је уметност увек била истинита.” и Данила Блануше: „Не само моћно оружје у борби за опстанак, математика је симбол наше интелектуалне снаге и јемство, да ће се људски дух вазда борити за узвишене циљеве.”

За мене је математика наука пуна изазова, где на различите начине, користећи разне могућности долазимо до правог решења. Та способност математичке мисли да даје могућност избора, изазива у мени жељу за сталним трагањем и откривањем нечег новог, као и постизањем најбољег могућег резултата. Јер ја математику доживЉавам као игру која даје више одговора, од којих је само један тачан, а ја треба да откријем тај одговор. Тако да на основу тога моја дефиниција математике би била: „Математика је игра са тачно утврђеним правилима, која ако се поштују воде ка тачном решењу, а истовремено је и изазов где користећи различите могућности можемо открити нешто ново.”

Данас се математика јако развила и има примене у много грана, како природних, тако и друштвених наука. Математика је основа свим наукама и као што Гаус каже: „Математика је краљица науке.”

Лазар Беић III-1

Примена неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског у геометрији

У тексту је обрађена неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског. Споменута неједнакост примењена је на решавање различитих задатака намењених ученицима средњих школа. Неједнакост се зове Коши-Буњаковски или Коши-Шварц-Буњаковскијева неједнакост. Усвојићемо последњи назив (краће, КШБ-неједнакост). Изрећи ћемо ову неједнакост, доказати је и применити на неколико геометријских задатака.

Теорема (КШБ-неједнакост): Нека су $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ две n-торке реалних бројева. Тада важи

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \qquad (1)$$

При томе једнакост у (1) важи ако и само ако су n-торке пропорционалне, тј. ако и само ако је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Доказ. Посматрајмо квадратну функцију $f\colon R \to R$ дефинисану формулом

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \\ &= (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \cdots + (a_n x + b_n)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)x \\ &+ (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \qquad (2)$$

Како је ова функција ненегативна ($f(x) \geq 0$ за сваки $x \in R$), њена дискриминанта D не може бити позитивна, тј.

$$D = 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0,$$

одакле следи тражена неједнакост (1).

Из (2) закључујемо да једнакост у (1) важи ако и само ако постоји реалан број м такав да је $b_k = ma_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, тј. ако су n-торке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ пропорционалне. Решимо сада неколико задатака.

Задатак 1. Нека су a и b дужине катета, а c дужина хипотенузе правоуглог троугла. Доказати да важи неједнакост

$$ab + bc + ca < 2c^2.$$

Решење. Према КШБ-неједнакости је:

$$(ab + bc + ca)^2$$

$$\leq (a^2 + b^2 + c^2)\,(b^2 + c^2 + a^2)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (c^2 + c^2)^2 = (2c^2)^2,$$

одакле следи $ab + bc + ca \leq 2c^2$. Приметимо да у претходној неједнакости не може стајати знак једнакости јер тројке (a, b, c) и (b, c, a) нису пропорционалне. Наиме, када би оне биле пропорционалне, постојао би неки реалан број m такав да је

$$a = mb, \quad b = mc, \quad c = ma.$$

Тада бисмо имали

$$c^2 = m^2a^2 = m^2\,(m^2b^2) = m^4b^2 = m^4\,(m^2c^2) = m^6c^2,$$

одакле би следило m = 1, а онда c = a, што би било у супротности са Питагорином теоремом. Дакле, важи строга неједнакост.

Задатак 2. Нека је T тачка унутар троугла ABC и нека су x, y, z редом удаљености те тачке од страница троугла a, b, c. Нека је R полупречник описане кружнице око троугла. Доказати да важи:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је троугао ABC једнакостраничан, а тачка T центар уписане кружнице.

Решење. Према КШБ-неједнакости је

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{ax} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{by} \cdot \sqrt{\frac{1}{b}} + \sqrt{cz} \cdot \sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2$$

$$\leq \left(\left(\sqrt{ax}\right)^2 + \left(\sqrt{by}\right)^2 + \left(\sqrt{cz}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2\right)$$

$$= (ax + by + cz)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

одакле следи

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) \leq \sqrt{ax + by + cz} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је

$$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{1}{a}}} = \frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{1}{b}}} = \frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{1}{c}}}$$

што је еквивалентно са $a^2x = b^2y = c^2z$. Како је $ax + by + cz = 2P$ и $P = \frac{abc}{4R}$, где је P површина троугла ABC, то је $ax + by + cz = \frac{abc}{2R}$, па имамо

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

$$\leq \sqrt{\frac{abc}{2R}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$= \sqrt{\frac{abc}{2R}} \cdot \sqrt{\frac{bc + ac + ab}{abc}} = \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{2R}}$$

Даље, опет према КШБ-неједнакости добијамо

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a^2x = b^2y = c^2z$ и $a = b = c$, а то је ако и само ако је $a = b = c$ и $x=y=z$. Дакле, једнакост важи ако и само ако је троугао ABC једнакостраничан и тачка T центар уписане кружнице у троугао ABC.

Задатак 3. Уз услове задатка 2, доказати да важи неједнакост

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 3\sqrt{\frac{R}{2}}$$

Решење. Најпре докажимо неједнакост $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$. Према синусној теореми је

$$a = 2R\sin\alpha,\ b = 2R\sin\beta,\ c = 2R\sin\gamma, \text{ па је}$$

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$= 4R^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)$$

$$= 4R^2\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} + 1 - \cos^2\gamma\right)$$

$$= 4R^2\left(2 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta)\right)$$

$$= 4R^2(2 - \cos(\alpha+\beta)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta)$$

$$= 4R^2(2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) = 8R^2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

Ако је троугао ABC тупоугли, онда је или $\cos\alpha < 0$, или $\cos\beta < 0$, или $\cos\gamma < 0$, па је

$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma < 0$ и зато $a^2 + b^2 + c^2 < 9R^2$. За правоугли троугао је $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$.

Нека је троугао ABC оштроугли. Тада су $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma > 0$, па према неједнакости аритметичке и геометријске средине имамо

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3$$

Како је

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} \le 2\sin\frac{\gamma}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 \le \frac{3}{2}$$

то је

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Следи

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 8R^2\left(1 + \tfrac{1}{8}\right) = 9R^2.$$

Применом претходног задатка закључујемо

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{\frac{9R^2}{2R}} = 3\sqrt{\frac{R}{2}}$$

Једнакост важи ако и само ако је троугао једнакостраничан, а тачка T центар уписане кружнице у троугао.

Задатак 4. Нека су a, b, c дужине страница, а t_a, t_b, t_c редом дужине тежишних дужи троугла ABC. Доказати да важи неједнакост

$$at_a + bt_b + ct_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Решење. Према КШБ-неједнакости је

$$(at_a + bt_b + ct_c)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2).$$

Како важи

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(видети(2)), то је

$$(at_a + bt_b + ct_c)^2 \le \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

одакле следи

$$at_a + bt_b + ct_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Једнакост важи ако и само ако је $\frac{a}{t_a} = \frac{b}{t_b} = \frac{c}{t_c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, а то је ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Задатак 5. Нека су a, b, c дужине страница троугла ABC, а a_1, b_1, c_1 дужине страница троугла $A_1B_1C_1$. Доказати да је $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ ако и само ако важи

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1)}$$

Решење. Према КШБ-неједнакости је

$$\left(\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1}\right)^2$$

$$\le \left(\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a_1}\right)^2 + \left(\sqrt{b_1}\right)^2 + \left(\sqrt{c_1}\right)^2\right)$$

$$= (a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1),$$

па је

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} \le \sqrt{(a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1)}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, односно ако и само ако је $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Марко Радосављевић III-1

Да ли математика сме да нестане?

Када би покушали да објаснимо ста је то математика, могли би слободно рећи да је то оруђе без којег све постаје ништа. Сваки човек на овом свету може да разуме математику и њена правила, ако се стварно потруди. Они који мисле да никад неће схватити математику, грдно се варају. Сваки од њих сигурно зна да израчуна запремину и површину своје собе, зна да разликује троугао од квадрата, и вероватно увек зна колики кусур треба да му се врати у продавници. Према томе сваки човек познаје и користи у свакодневном животу бар оно најосновније из математике. Зато математика и јесте оруђе, али не знају сви да користе то оруђе на исти начин.

Већина деце би сигурно била пресрећна када би се математика избацила из школе. Али како би онда знали за колико времена ћемо стићи из Београда до Новог Сада ако се крећемо брзином од 60 км/х? Како ће архитекта знати да конструише кућу ако не зна шта је то прав угао и ако никад није чуо за синх и цосх? Како ће моћи да се води оставишна расправа на суду, ако судија и остали правници не буду знали шта је то половина, четвртина или још горе ако им ½ и 2/4 буду различити.

Математика је свуда иста, и учи се у свим школама на свету, за разлику од неких других предмета. Као на пример историје, која је различита од државе до државе, с обзиром да свака има своју историју. Исто важи и за географију. Такође важи и за матерњи језик. Узмимо за пример два човека који имају исто занимање. Оба су продавци на пијаци.. Један живи у Србији и учио је српски, а други живи у Украјини и учио је украјински. Обојица продају бресквe. Србин по цени 60 дин/кг, а Украјинац 60 гривна/кг. Када би неко од муштерија затражио 1.25 кг сигурно би обојица знализа да му наплате 75 дин (гривна). Што значи да су обојица учила математику и да је и за Србе и за Украјинце и за цео свет математика иста, а то да ли ће учити српски, енглески, украјински,.. Зависи само од државе у којој су родјени.

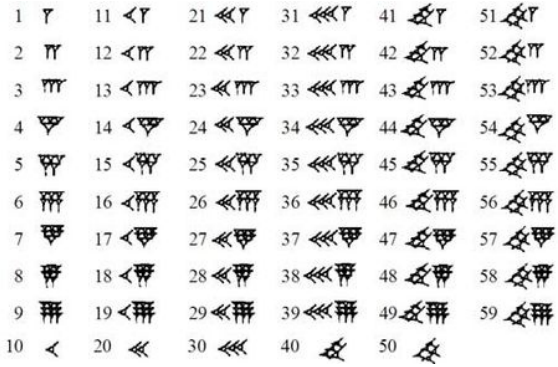
А да ли математика може да се замени са нечим? Да ли је могу заменити рачунари?

У данашње време рачунари замењују већину ствари, између осталог и пријатеље (јер већина деце ће радије седити за својим рачунаром и играти неку игрицу, него ићи на игралиште да се игра са другом децом). Зашто онда не би могла да замени математију?

Употребом рачунара можемо много олакшати разумевање а самим тим и учење математике деци. Али шта би се десило када би рачунари у потпуности заменили математику? Узмимо неко дрво из земље, тј. ископајмо му корен, па му потом одстранимо корен. Откинимо неку гранчицу са тог дрвета и убацимо је у рупу где се некад налазио корен тог дрвета, и посадимо то дрво на старо место. Да ли ће то дрво, сада када смо му корен заменили гранчицом, моћи да се развија, цвета и листа? Наравно да неће. После одређеног времена оно ће се осушити и ником више неће бити од користи.

Исто би се догодило када би рачунарима заменили математику. Без своје основе рачунари не би могли даље да се развијају, а не би могле ни друге дисциплине које почивају на математици. Математика је корен многим наукама.

О високом степену развоја математике код Вавилонаца сведочи глинена плоча Плимптон 322 , писана клинастим писмом, а представља табелу целобројних страница правоуглог троугла. Чињеница да је на тој плочи представљена тројка бројева (12709, 13500, 18541) поткрепљује тезу неких историчара математике, да су Вавилонци знали опште решење проблема Питагориних тројки. Према руском математичару Колмогорову ово је прва епоха у периодизације развитка математике, која је послужила за сакупљање довољно великог фактичко материјала за рађање нове науке.



Борис Мајић III-1

НАЈУСПЕШНИЈИ ТАКМИЧАРИ

Државно такмичење из математике одржано је 17.03.2012. године у Новом Саду. Пласман на такмичење изборило је десет ученика Ваљевске гимназије, који су били сврстани у две категорије.

А категорија

Вук Милутиновић I-1 (похвала)
Давид Копривица II-1
Јована Ашковић II-1
Растко Прлић II-1
Ђорђе Живановић III-1
Сања Малешевић IV-1

Б категорија

Сара Бирчанин I-2 (II награда)
Ивана Јездић II-2 (похвала)
Љиљана Тодоровић III-2 (похвала)
Светлана Костадиновић IV-3

На екипном такмичењу **„Архимедес“** одржаном у Београду, екипа наше школе заузела је 1. место (I награда) у конкуренцији 52 средњих школа из Србије.

Чланови екипе Ваљевске гимназије били су:

Вук Милутиновић I-1 (I награда)
Растко Прлић II-1 (похвала)
Ђорђе Живановић III-1 (II награда)
Сања Малешевић IV-1 (I награда)

ДРЖАВНИ ПРВАЦИ

Сања Малешевић

Ученица је IV-1 специјализованог математичког одељења.

У првом разреду учествовала је на државном такмичењу из математике. На екипном такмичењу „Архимедес“ освојила је похвалу, а на такмичењу Наука младима освојила је прву награду са максималним бројем поена са радом из математике. Била је најбољи ученик одељења и разреда.

У другом разреду учествовала је на државном такмичењу из математике где је освојила похвалу, на екипном такмичењу „Архимедес“ освојила је I награду и прво место. На такмичењу Наука младима освојила је I награду са максималним бројем поена са радом из математике „Златни пресек“.Рад је проглашен за најбољи из те области. Учествовала је и на државном такмичењу из физике где је освојила II награду. На окружном такмичењу из програмирања освојила је прво место и пласирала се на државно такмичење. Била је најбољи ученик школе.

У трећем разреду учествовала је на државном такмичењу из математике, на екипном такмичењу „Архимедес“ освојила је I награду Учествовала је и на државном такмичењу из физике. Била је најбољи ученик одељења и разреда.

У четвртом разреду учествовала је на државном такмичењу из математике, као и на државном такмичењу из физике где је освојила похвалу. На екипном такмичењу „Архимедес“ освојила је појединачно прво место и II награду, а екипно прво место и I награду.

Ђорђе Живановић

Ученик је III-1 специјализованог математичког одељења . Ове школске године на окружном такмичењу из математике освојио прво место и учествовао на државном такмичењу. Учествовао је на „Архимедесу“где је освојио 2. место и трећу награду, члан је екипе која је освојила екипно прво место и прву награду на „Архимедесу“. На математичком такмичењу „Кенгур без граница“ освојио је трећу награду. На окружном такмичењу из информатике освојио је треће место.

Растко Прлић

Прва четири разреда завршио је у ОШ ,,Андра Савчић“, док је део виших разреда завршио у Првој основној ,а део у Сједињеним Америчким Државама. У основној школи такмичио се из математике, физике и хемије. На Државном такмичењу из математике у САД-у освојио је 1. награду. Сада је ученик II разреда специјализованог-математичког одељења. Током прошле године учествовао на Државном такмичењу из математике, међународном математичком такмичењу ,,Кенгур без граница“(похвала) и био је члан екипе која је на екипном републичком такмичењу из математике ,,Архимедес“ освојила 3. место. И ове године учествовао је на републичком такмичењу из математике, и на ,,Архимедесу“ где је наша школа освојила 1. место. У досадашњем школовању био је ђак генерације Прве основне школе, постигао значајне резултате у пливању и стекао диплому FCE.

Вук Милутиновић

Завршио је "Прву основну школу" као ђак генерације. Од свих предмета највише се пронашао у математици и физици. Био је у сваком разреду на републичком такмичењу из математике (награђен у шестом и осмом разреду) и освоио је 3. и 2. место и учесник је Српске математичке олимпијаде. У слободно време свира гитару, игра кошарку. Уписао је специјално математичко оделење зог интересовања према природним наукама. У првој години је као учесник "Архимедеса" освојио прво место. Учествовао је и на државном такмичењу из математике, на ком је освојио похвалу. Планира да се бави програмирањем.

Пријемни испит из математике за упис на Електротехнички факултет

Тест има 20 задатака на 2 странице. Задаци 1-2 вреде по 3 поена, задаци 3-7 вреде по 4 поена, задаци 8-13 вреде по 5 поена, задаци 14-18 вреде по 6 поена и задаци 19-20 по 7 поена. Погрешан одговор доноси -10% од броја поена предвиђених за тачан одговор. Заокруживање Н не доноси ни позитивне ни негативне поене. У случају заокруживања више од једног одговора, као и незаокруживања ниједног одговора, добија се -1 поен.

1. Који од пет датих израза има различиту вредност од остала четири израза?
(A) 2^8 (B) 4^4 (C) $8^{8/3}$ (D) 16^2 (**E**) $32^{6/5}$

2. Вредност израза $\left(\frac{i^{2011}+i^{2012}}{i^{2013}-i^{2014}}\right)^{2015}$, $(i^2=-1)$, једнака је
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (**D**) i (E) –i

3. Ако је $|x|>2, x\in R$ тада је израз $\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$ идентички једнак:
(A) 4 (B) -4 (**C**) x (D) 2x (E) 4x

4. Укупан број реалних решења једначине $\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}=|x+1|$ је:
(A) 0 (**B**) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

5. Збир $\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}$ једнак је:
(A) $-2\sin\frac{\pi}{14}$ (B) $-2\cos\frac{\pi}{14}$ (C) $2\sin\frac{\pi}{14}$ (D) $2\sin\frac{\pi}{7}$ (**E**) $2\cos\frac{\pi}{14}$

6. Основице једнакокраког трапеза су 15cm и 5cm, а краци 13cm. Његова висина (u cm) је:
(A) 16 (B) 8 (C) 10 (**D**) 12 (E) 9

7.Ако су x_2 и x_1 корени квадратне једначине $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=1$, тада је израз $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ једнак:

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 2 (**D**) 3 (E) 5

8. Нека су у произвољном троуглу α, β і γ углови, a, b і c дужине страница наспрам датих углова и R полупречник описаног круга, тада је $\frac{a^2+b^2+c^2}{3-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$ једнако:

(A) R^2 (B) $2R^2$ (C) $3R^2$ (**D**) $4R^2$ (E) $5R^2$

9. Ако је $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ $(x\neq\pm1)$ тада је $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ једнако:

(A) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ (B) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ (**C**) 0 (D) $\frac{x-1}{x+1}$ (E) $-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

10. Праве $-ax+y-3=0, x-by+2=0$ секу се у центру круга $x^2+y^2-2x+4y-10=0$. Угао између ових правих је:

(A) 60˚ (B) 30 ˚ (C) 90 ˚ (**D**) 45 ˚ (E) 75 ˚

11.Укупан број реалних решења система једначина $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2}, x^2+y^2=20$ јесте:

(A) 0 (B) 2 (**C**) 4 (D) 6 (E) 8

12. Збир бесконачне геометријске прогресије $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\cdots$ једнак је:

(A) $2+\sqrt{2}$ (B) $2-\sqrt{2}$ (C) 1 (**D**) $4+3\sqrt{2}$ (E) $4-3\sqrt{2}$

13. Остатак при дељењу полинома $x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$ полиномом x^2-1 износи:

(A) 0 (B) 1 (C) $2x$ (D) $4x$ (**E**) $6x$

14. На колико начина од 2 математичара и 8 инжињера можемо формирати петочлану комисију у којој ће бити бар један математичар?

(**A**) 196 (B) 248 (C) 70 (D) 56 (E) 140

15. Збир свих решења једначине $\sqrt{sin^2x+\frac{1}{2}}+\sqrt{cos^2x+\frac{1}{2}}=2$ на сегменту $[0,2\pi]$ износи:
(A) π (B) 2π (C) 3π (**D**) 4π (E) Ниједан од понуђених одговора

16. У развоју бинома $(x+y)^n$ $(x,y\in \boldsymbol{R},\ n\in \boldsymbol{N})$ други члан је једнак 240, трећи 720, а четврти 1080, тада је збир $x+y+n$ једнак:
(A) 11 (B) 9 (**C**) 10 (D) 25 (E) 280

17. Маскимални обим правоугаоника уписаног у круг датог полупречника r износи:
(A) $5\sqrt{2}\,r$ (**B**) $4\sqrt{2\,r}$ (C) $\sqrt{2}\,r$ (D) $3\sqrt{2}\,r$ (E) Ниједан од понуђених одговора

18. Основа праве четворостране пирамиде је правоугаоник дијагонале d и угла α међу дијагоналама. Ако бочне ивице образују са основом пирамиде угао β, тада је запремина ове пирамиде једнака:
(A) $\frac{d^3}{12}\sin\alpha\, ctg\beta$ (**B**) $\frac{d^3}{12}\sin\alpha\, tg\beta$ (C) $\frac{d^3}{4}\sin\alpha\, tg\beta$ (D) $\frac{d^3}{12}\sin\frac{\alpha}{2}tg\beta$ (E) $\frac{d^3}{12}\cos\alpha\, tg\beta$

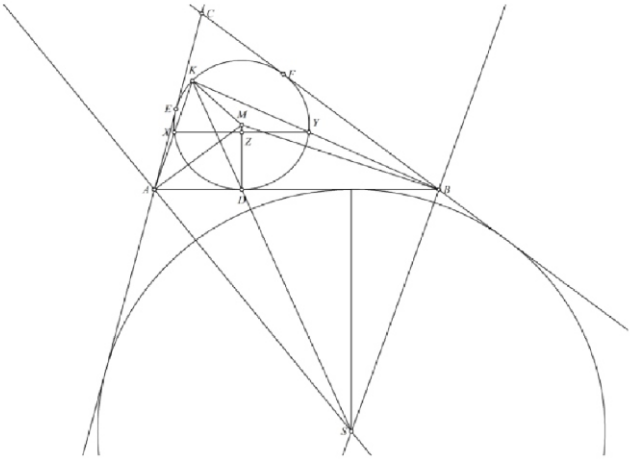
19. Сва реална решења једначине $\log_{2011}(2010x)=\log_{2010}(2011x)$ припадају инервалу:
(**A**) $\left(0,\frac{1}{2011}\right]$ (B) $\left(\frac{1}{2011},\frac{1}{2010}\right]$ (C) $\left(\frac{1}{2010},1\right]$ (D) $\left(1,\frac{2011}{2010}\right]$ (E) $\left(\frac{2011}{2010},+\infty\right)$

20. Скуп свих реалних вредности x за које важи неједнакост $\frac{3\cdot 3^{2x}-4\cdot 4^{2x}}{|-1+5^{x+1}|-4}<0$ је облика (за неке реалне бројеве a,b такве да је $-\infty<a<b<+\infty$):
(A) $(0,a)$ (**B**) $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ (C) $[a,b]$ (D) (a,b) (E) $(a,b)\cup(b,+\infty)$

Комплексни бројеви

При решавању „тежих“ задатака из геометрије јавља се потреба за неким рачунским методама. Често употребљавана техника су комплексни бројеви и геометрија заснована на њиховим особинама.Следећи задатак представља изузетно тежак задатак из геометрије за решавање нерачунском методом.

Задатак. Нека је S центар приписаног круга троугла ABC, који одговара страници AB, а нека је D додирна тачка уписаног круга троугла ABC и странице AB. Права CD по други пут сече круг уписан у троугао ABC у тачки K. Доказати да је права KD симетрала угла <AKB.



Нека су X, Y редом пресечне тачке AK, BK са кружницом уписаном у троугао ABC. Уочимо да је XY нормално на MD,докажимо то. Ово ћу извести коришћењем комплексних бројева. Нека је наша раван комплексна с тим да тачкама A, B, C… одговарају редом комплексне координате a, b, c…

Следећа тврђења навешћу чисто информативно јер су она позната у раду са комплексним бројевима, а и веома лако се доказује користећи алгебарски облик комплексног броја:

$$\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}, \qquad \overline{x-y}=\overline{x}-\overline{y},$$

$$\overline{xy}=\overline{x}\cdot\overline{y}, \qquad \frac{\overline{x}}{\overline{y}}=\overline{\left(\frac{x}{y}\right)},$$

$$x\cdot\overline{x}=|x^2|$$

На теореме ћу се позивати Т1, Т2…, а леме Л1, Л2…

Лема1. $x=\overline{x} \Leftrightarrow x\in(1)$

($\Leftarrow$) Ако је x реалан десна страна очигледно повлачи леву
($\Rightarrow$) Ако x напишемо у алгебарском облику добићемо да је Im(x)=0, што значи $x\in R$
Следеће теореме ће важити за различите тачке a, b, c, d тј. тачке које нису подударне ни у једном пару.

Теорема 1. $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}} \Leftrightarrow$ *a, c* су колинеарне

($\Rightarrow$) Множећи унакрсно добијамо једнакости па леме 1, па је $\frac{a-b}{a-c}$=k, $k\in R$ што значи да су a-b, a-c (вектори) колинеарни (а самим тим и „дужи“ AB, AC), што повлачи a, b, c (тачке) су колинеарне. Други смер се слично показује.

Теорема 2. $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}} \Leftrightarrow ab\|cd$
Слично претходној.

Теорема 3. $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=-\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}} \Leftrightarrow ab\perp cd$
Овде се користи идеја да $x=-\overline{x} \Leftrightarrow$ x чисто имагинаран број, и $x \perp y \Leftrightarrow x=iy$.

Јединични круг има особину да му је центар уједно и центар комплексне равни,а полупречник јединичне дужине. Следећа теорема важи за тачке a,b овог круга:

Теорема 4. $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -ab$.
Унакрсним множењем и коришћењем $a\,\overline{a} = |a|^2 = 1$ (a, b припадају јединичном кругу).

Теорема 5. a, b тачке јединичне кружнице. Тада се заједничке тангенте у овим тачкама секу у тачки $\frac{2ab}{a+b}$.

Очигледно је да за a = -b, тачка не постоји (што и говори формула), па нека је тачка T пресечна. Примењујући Т3 пошто је OA⊥TA, добијамо $\frac{a-o}{\overline{a}-\overline{t}}$, користећи чињеницу $a\overline{a}=1$, и множењем имамо $\overline{t} = \frac{2-\overline{a}t}{a}$.

Симетрично је $\overline{t} = \frac{2-\overline{b}t}{b}$.

Изједначавањем претходна два израза:

$2a - a\overline{b}t = 2b - b\overline{a}t \Leftrightarrow t = \frac{2(a-b)}{a\overline{b}-\overline{a}b}$, сменом $\overline{b} = \frac{1}{b}, \overline{a} = \frac{1}{a}$:

$t = \frac{2(a-b)}{\frac{a^2-b^2}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$.
MA је симетрала унутрашњег <BAC,MS симетрала њему одговарајуће спољашњег угла, па је <MAS = <ABC/2+(180°-<ABC)/2=90°, што значи MA⊥AS, слично је MB⊥BS.

Без умањивања општости нека је M центар комплексне равни,и уписана кружница троугла ABC једнинична. На основу Т3 за s, m, a

$\frac{m-a}{\overline{m}-\overline{a}} = -\frac{s-a}{\overline{s}-\overline{a}}$, унакрсним множењем, и m=0 $\quad -a\overline{a} + \overline{s}a = -s\overline{a} + a\overline{a}$

$$\overline{s} = \frac{-s\overline{a}+2a\overline{a}}{a} \qquad (1)$$

Пошто S припада симетрали спољашњег угла B аналогно као A,мењајући a са b добијамо

$$\overline{s} = \frac{-s\overline{b}+2b\overline{b}}{b} \qquad (2)$$

Изједначавајући изразе (1) и (2) добијамо

$$s = \frac{2(\overline{a}-\overline{b})ab}{\overline{a}b-a\overline{b}}. \qquad (3)$$

Нека су D,E,F редом додирне странице уписане кружнице у троугао ABC и редом страница AB, BC, AC.

На основу T5 $a = \frac{2de}{d+e}, b = \frac{2df}{d+f}$, користећи особину да тачке d, e, f

припадају кругу ($d\overline{d} = e\overline{e} = f\overline{f} = 1$)

$$\overline{a} = \frac{2}{d+e}, b = \frac{2}{d+f} \qquad (4)$$

Користећи a, b, b из (4),убацујући (3)

$$s = \frac{4def}{(d+e)(d+f)}. \qquad (5)$$

Коњугованьем претходног израза

$$\overline{s} = \frac{4d}{(d+e)(d+f)}. \qquad (6)$$

По услову задатка k, d, s су колинеарне,на основу Т1:

$$\frac{k-d}{\overline{k}-\overline{d}}=\frac{s-d}{\overline{s}-\overline{d}} \overset{T4}{\Rightarrow} -kd=\frac{s-d}{\overline{s}-\overline{d}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-\frac{\frac{s}{d}-1}{\overline{s}-\overline{d}} \overset{(5),(6)}{\Longleftrightarrow} k=-\frac{\frac{4ef}{(d+e)(d+f)}-1}{\frac{4d}{(d+e)(d+f)}-\frac{1}{d}}$$

Простим рачунањем

$$k=\frac{d(-3ef+d^2+de+df)}{3d^2-de-df-ef}. \qquad (7)$$

По Т1.

$$\frac{a-k}{\overline{a}-\overline{k}}=$$

$$\frac{x-k}{\overline{x}-\overline{k}} \overset{T4 \text{ за } k,x}{\Longrightarrow} \frac{a-k}{\overline{a}-\overline{k}}-xk \overset{k\overline{k}=1}{\Longleftrightarrow} \qquad \overset{k\overline{k}=1}{\Longleftrightarrow} x=\frac{(k-a)k}{k(k\overline{a}-1)}=\frac{k-a}{k\overline{a}-1.}$$

(8)

Аналогно је

$$y=\frac{k-b}{k\overline{b}-1} \qquad (9)$$

Да би xy⊥md по Т3 је довољно доказати

$$-\frac{x-y}{\overline{x}-\overline{y}}=\frac{m-d}{\overline{m}-\overline{d}} \overset{\text{T4 за } x,y,m=0}{\Longrightarrow} xy=d^2$$

Остаје нам да покажемо $xy=d^2$

$$xy = d^2 \overset{(8),(9)}{\Longleftrightarrow} \frac{k-a}{k\overline{a}-1} \cdot \frac{k-b}{k\overline{b}-1} = d^2 \overset{(7),(4)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(7),(4)}{\Longrightarrow} \frac{d\left(\frac{-3ef+d^2+de+df}{3d^2-de-df-ef} - \frac{2e}{d+e}\right)}{\left(\frac{d(-3ef+d^2+de+df)}{3d^2-de-df-ef} \cdot \frac{2}{d+e} - 1\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{-3ef+d^2+de+df}{3d^2-de-df-ef} - \frac{2f}{d+f}\right)}{\left(\frac{d(-3ef+d^2+de+df)}{3d^2-de-df-ef} \cdot \frac{2}{d+f} - 1\right)}$$

$$= d^2 \Leftrightarrow \frac{\frac{(d-e)(d^2+df-3de+ef)}{(d+e)(3d^2-df-ed-ef)} \cdot \frac{(d-f)(d^2+de-3fd+ef)}{(d+f)(3d^2-df-ed-ef)}}{\frac{(d-e)(d^2-3df+de+ef)}{(d+e)(3d^2-df-de-ef)} \cdot \frac{(d-f)(d^2+df-3ed+ef)}{(d+f)(3d^2-df-de-ef)}} = 1$$

што је тачно јер су бројилац и именилац великог разломка једнаки.

Овиме је доказано xy⊥md, тј.

$$XZM=<YZM=<DZX=<DZY=90° \qquad (10)$$

Нека је Z тачка пресека XY ,MD.
$\Delta MZX \cong \Delta MZ$(ССУ− $<XZM=<YZM$(10), $XM=MY$ полупречници јединичне кружнице),

$$MZ=MZ \Rightarrow XZ=YZ \qquad (11)$$

$\Delta XZD \cong \Delta YZ$(СУС−(11),$ZD=ZD$,$<DZX=<DZY$(10))
$\Rightarrow XD=DY$

Из претходног следи <DKX= <DKY, као периферијски углови над једнаким луковима исте кружнице. Одавде следи да је KD симетрала <AKB.

Ђорђе Живановић III-1

Занимљивости

У изучавањима великих грчких мудраца и формално је заживела нова наука. Њено име потиче од грчке речи μάθημα (матхема) што значи наука, знање, изучавање. Она убрзо добија и своје прве две дисциплине: аритметику (науку о бројевима) и геометрију (науку о облицима у природи). Прва велика школа после Питагорејске је Платонова Академија на чијем улазу је писало „Нека не улази ко не зна геометрију“. Поред индуктивног грчки филозофи и математичари почињу користити и дедуктивни метод закључивања у својим разматрањима опажајног света. У заснивању формалне логике највећи допринос даје Аристотел. Он даје и прву дефиницију математике: „математика је наука о величинама“. Такође отвара нову школу Лицеј, претечу каснијих високих школа. Еуклид, енциклопедијским сакупљањем свих дотадашњих математичких знања у својим Елементима поставља темеље математике као дедуктивне аксиоматске науке.

Буђењу европске математике средњег века понајвише су допринели италијански математичари. Најпре је, у XIII веку Фибоначи, својим делом Књига о абаку систематизовао античка и арапска знања из аритметике користећи арапске преводе и оригинална дела. Та књига је оставила огроман утицај на ширење математичке мисли и популарност индијског декадног система и дуго је остала непревазиђена. У чувеним интригантским математичким двобојима XV века дел Феро, Тартаља, Кардано и Ферари решавају алгебарске једначине трећег и четвртог степена. Значајна су и изучавања Леонарда да Винчија о појавама „златног пресека“ у природи. Немачки математичар Јохан Милер Региомонтан објављује први рад који је посвећен само тригонометрији. У XVI веку Непер израчунава логаритме, а Виет уводи симболику и прави словну алгебру која ће нешто касније добити савремени облик.

САДРЖАЈ

Пјер де Ферма.....1
Нелинеарне Диофантове једначине.....5
Лепота математике.....11
Примена неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског у геометрији.....12
Да ли математика сме да нестане?.....19
Најуспешнији такмичари.....21
Државни прваци.....22
Задаци са пријемног испита за упис на Електротехнички факултет.....24
Комплексни бројеви 27
Занимљивости.....33

ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

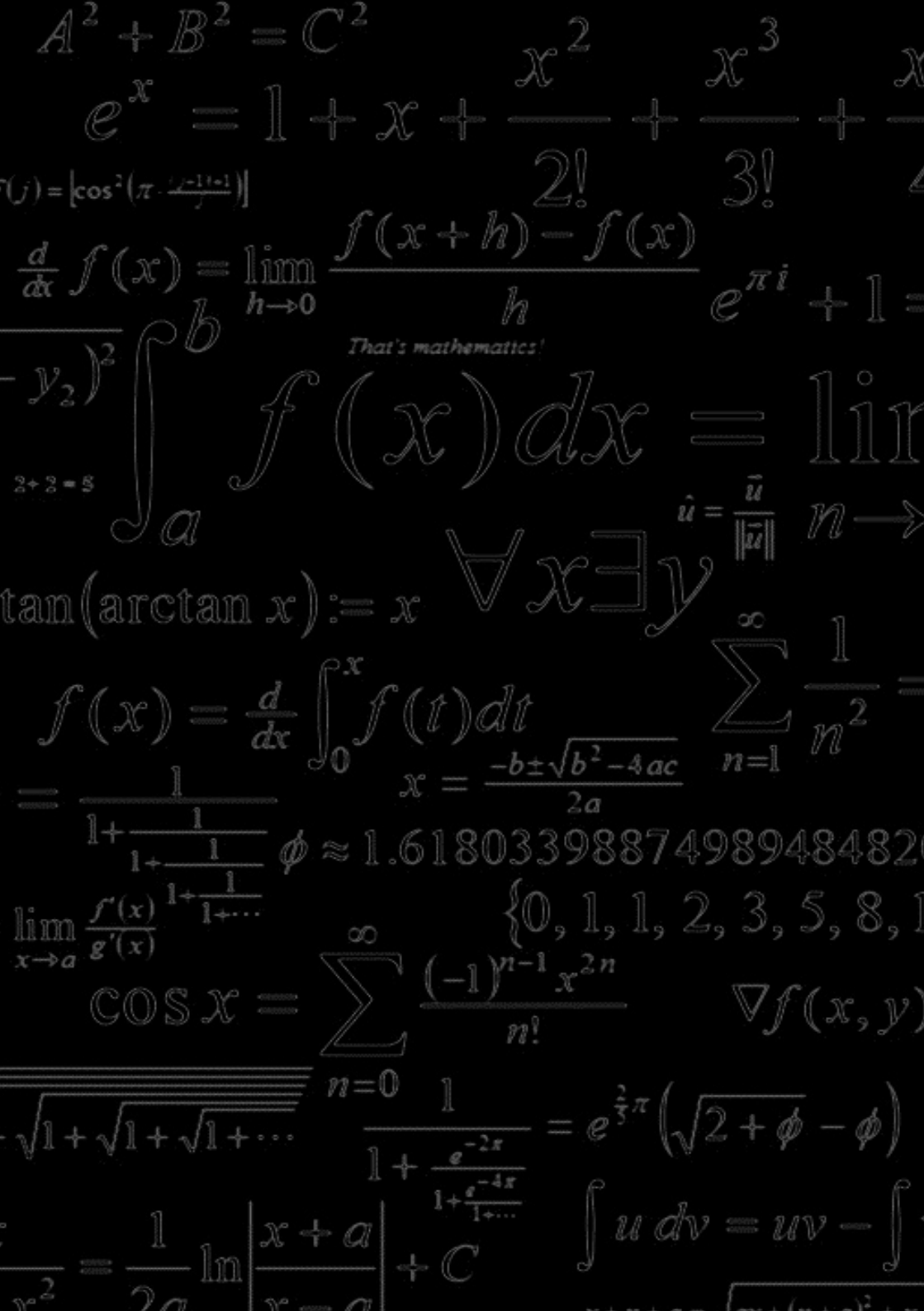
"МЛАДИ МАТЕМАТИЧАР" је лист за ученике средњих школа.
Излази једном годишње. Тираж броја је 500 примерака.

ИЗДАВАЧ

Ваљевска гимназија, Вука Караџића бр. 3, 14000 Ваљево
Тел-факс: 014/221-622
www.valjevskagimnazija.edu.rs e-mail: gimvaljevo@ptt.rs

РЕДАКЦИЈА

Главни и одговорни уредник: Предраг Јевтић, професор математике
Технички уредник: Момчило Гајић III-1
Ученици сарадници: Јелена Марковић I-1, Никола Трифуновић III-1, Лазар Беић III-1, Марко Радосављевић III-1, Борис Мајић III-1, Ђорђе Живановић III-1


That's mathematics!