Подружница математичара Ваљево
Ваљевска гимназија

МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР „ИНТЕГРАЛ КУП”

Ваљево, 02. 12. 2017.

Задаци на турниру су подељени у три целине: I алгебра и бројеви, II геометрија и III комбинаторика. У оквиру сваке целине дата су по три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. У сваком задатку са вишеструким избором понуђено је пет одговора (**А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак, треба да заокружи слово **Н**. Ако је заокружен само тачан одговор добија се 5 поена, ако је заокружен нетачан одговор добија се -1 поен, ако је заокружено само слово **Н** добија се 0 поена. Задаци који нису са вишеструким избором вреде 10 поена. На тесту се може освојити највише 75 поена. Време за израду задатака је 150 минута.

7. и 8. разред

I Алгебра и бројеви

1. Да би релација $(\sqrt{11}+\sqrt{14}) * (\sqrt{12}+\sqrt{13})$ била тачна, уместо симбола $*$ треба написати симбол:

(А) $<$ (Б) $=$ (В) $>$ (Г) $\geq$ (Д) ниједан од понуђених симбола (Н) Не знам

2. Број природних делилаца броја $2^1 3^2 4^3 5^4 6^5$ је

(А) 120 (Б) 336 (В) 520 (Г) 718 (Д) 720 (Н) Не знам

3. Са колико нула се завршава најмањи природан број чија је половина потпун квадрат, чија је петина потпун куб и чија је десетина потпун пети степен неког природног броја?

(А) 10 (Б) 16 (В) 18 (Г) 20 (Д) 25 (Н) Не знам

4. Одреди све четвороцифрене бројеве $\overline{abcd}$ за које је $5\overline{abc} = \overline{dbc}$.

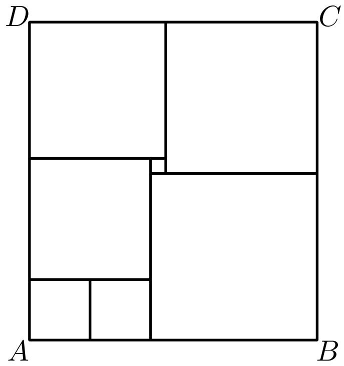
II Геометрија

1. Збир свих целих бројева x за које је троугао са страницама $6, 8, x$ тупоугли је:

(А) 50 (Б) 48 (В) 45 (Г) 36 (Д) 12 (Н) Не знам

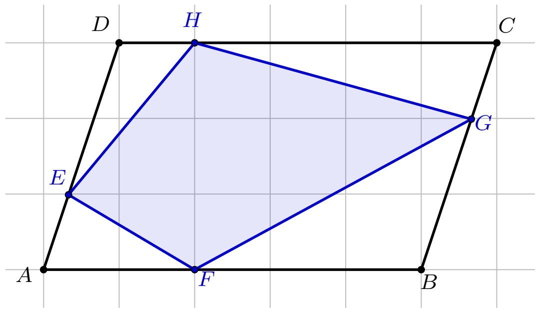
2. Правоугаоник $ABCD$ је разложен на седам квадрата као на слици. Страница најмањег квадрата је $1\,\mathrm{cm}$. Ако је површина правоугаоника $ABCD$ једнака $x\,\mathrm{cm}^2$, онда је x једнако:

(А) 361 (Б) 380 (В) 399 (Г) 400 (Д) 410 (Н) Не знам



Слика уз задатак 2.

3. У јединичној квадратној мрежи дат је паралелограм $ABCD$ (видети слику испод). На његовим страницама бира се по једна тачка у пресецима са линијама квадратне мреже, с тим да темена паралелограма не могу бити одабрана. Који од наведених бројева не може бити једнак површини четвороугла одређеног тим тачкама?



(А) 6 (Б) 7,5 (В) 8,5 (Г) 9 (Д) 10 (Н) Не знам

4. Нека је D тачка странице AB троугла ABC. Ако је $AD = 1\,\text{cm}$, $DB = 2\,\text{cm}$, $\angle BAC = 45^\circ$ и $\angle BDC = 60^\circ$, одредити полупречник описане кружнице троугла ABC.

III Комбинаторика

1. Океанску државу *Острванију* чини 9 острва. Свако од острва повезано је директном авионском линијом са сваким другим острвом. Колико највише авионских линија се може укинути тако да се и даље из сваког острва може авионом доћи на било које друго острво, директном линијом или са преседањима? Авионску линију између два острва рачунати као једну, тј. не узимати у обзир смер кретања авиона.

(А) 27 (Б) 28 (В) 18 (Г) 36 (Д) 9 (Н) Не знам

2. Четвороцифрених природних бројева који имају тачно по једну цифру из скупа $\{2, 3, 4, 5\}$ дељивих са 11 има:

(А) 4 (Б) 5 (В) 6 (Г) 8 (Д) више од 8 (Н) Не знам

3. У кутији се налази 101 куглица од којих је свака обојена једном од следеће четири боје: црвеном, белом, плавом или зеленом. Познато је да се при извлачењу, без гледања, мора извући бар 90 куглица да би међу њима сигурно биле куглице свих боја. Колики је најмањи број куглица које треба извући из кутије, без гледања, тако да међу њима буду 3 куглице такве да је свака од њих обојена различитом бојом.

(А) 37 (Б) 77 (В) 78 (Г) 73 (Д) 81 (Н) Не знам

4. Колико има троцифрених природних бројева који нису дељиви ни са 12, ни са 15, ни са 18?

ОДГОВОРИ И РЕШЕЊА

I Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**А**	**В**	**Б**

Задатак 4. Из услова $5\overline{abc} = \overline{dbc}$ је $5(100a + \overline{bc}) = 100d + \overline{bc}$, односно $500a + 5\overline{bc} = 100d + \overline{bc}$. Одавде следи $500a + 4\overline{bc} = 100d$, односно $d = 5a + \dfrac{\overline{bc}}{25}$.

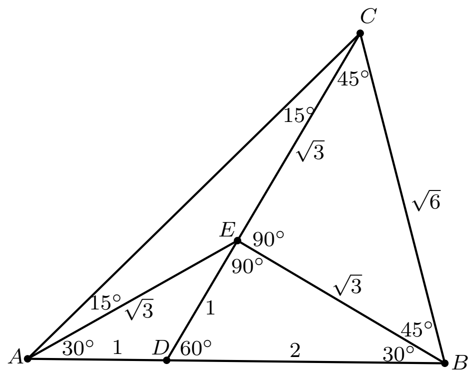
Цифра a, као почетна цифра броја, може узети само вредност 1 јер за веће вредности не би постојала цифра d, док је $\overline{bc} \in \{\overline{00}, \overline{25}, \overline{50}, \overline{75}\}$.

Одавде добијамо бројеве: 1005, 1256, 1507 и 1758.

II Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Б**	**В**	**Д**

Задатак 4. Нека је E подножје нормале из B на CD.



$\triangle EBD$:
$\angle BED = 90^\circ$, $\angle BDE = 60^\circ$, $DB = 2$
$\Rightarrow \angle DBE = 30^\circ, DE = 1, EB = \sqrt{3}$

$\triangle ADE$:
$\angle BDE = 60^\circ$, $AD = 1$, $ED = 1$
$\Rightarrow \angle DAE = \angle AED = 60^\circ : 2 = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle EAC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$

$\triangle ABE$: $\angle ABE = \angle BAE$, $BE = \sqrt{3}$
$\Rightarrow \quad AE = BE = \sqrt{3}$

$\triangle ADC$: $\quad (BDE = 60^\circ$, $\angle DAC = 45^\circ) \quad \Rightarrow \quad \angle ACD = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$

$\triangle AEC$: $\quad \angle EAC = \angle ACE \quad \Rightarrow \quad EC = EA = \sqrt{3}$

$\Rightarrow EA = EB = EC = \sqrt{3}$

$\Rightarrow E$ је центар описане кружнице $\triangle ABC$ и полупречник кружнице је $\sqrt{3}$

III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Б**	**Г**	**В**

Задатак 4.

Нека је A скуп троцифрених бројева дељивих са 12, B скуп троцифрених бројева дељивих са 18 и C скуп троцифрених бројева дељивих са 15. Тада је $|A| = 75$, $|B| = 50$, $|C| = 60$, $|A \cap B| = 25$, $|A \cap C| = 15$, $|B \cap C| = 10$ и $|A \cap B \cap C| = 5$. Сада можемо нацртати Венов дијаграм скупова A, B и C и на основу њега закључујемо да је $|A \cup B \cup C| = 140$. Дакле, решење задатка је $900 - 140 = 760$.