SZERBIAI MATEMATIKUSOK EGYESÜLETE – VALJEVÓI TAGOZAT
VALJEVÓI GIMNÁZIUM

INTEGRÁL KUPA 2020

Online 2020. november 28.

Megoldások – I. és II. osztály

I. ALGEBRA ÉS SZÁMOK

A feladat sorszáma	1	2	3
A helyes válasz	C	D	D

4. feladat
Kiinduló egyenlőtlenségünk az $5^3 - 5^2 = 10^2$. Ha ezt az egyenlőtlenséget megszorozzuk 5^{2k}-nal, ahol k tetszőleges természetes szám, az $5^{2k}\cdot 5^3 - 5^{2k}\cdot 5^2 = 5^{2k}\cdot 10^2$ egyenlőséget kapjuk, amely ekvivalens az $5^{2k+3} - 5^{2k+2} = (5^k\cdot 10)^2$ egyenlőséggel. Vegyük észre, hogy $2k+3$, $2k+2$ és $5^k\cdot 10$ természetes számok. Az utolsó egyenlőségből következik, hogy az $(x, y, z)= (2k+3, 2k+2, 5^k\cdot 10)$ számhármasra érvényes az $5^x - 5^y = z^2$ egyenlőség. Tekintve, hogy az

$$\{((x, y, z) \mid x = 2k+3 \wedge y = 2k+2 \wedge z = 5^k\cdot 10 \wedge k\in\mathbb{N}\}$$

Halmaz (ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza) végtelen halmaz, és így a feladat állítása helyes.

II. GEOMETRIA

A feladat sorszáma	1	2	3
A helyes válasz	E	C	B

4. feladat
Legyen k tetszőleges természetes szám. Tekintve, hogy a $3k$, $4k$, és $5k$ számokra fennáll a $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$ egyenlőség, következtetünk arra, hogy van olyan háromszög, amely oldalainak mérőszámai a $3k$, $4k$, és $5k$ természetes számok, és ez a háromszög derékszögű. E háromszög kerület $12k$. Ha k-nak 12^{2019}-t veszünk, azt kapjuk, hogy a háromszög kielégíti a feladat feltételeit és a kerülete $12 \cdot 12^{2019} = 12^{2020}$, ami egy természetes szám 2020. hatványa. Tehát a kérdésre a válasz igen.

III. KOMBINATORIKA.

A feladat sorszáma	1	2	3
A helyes válasz	E	D	D

4. feladat

Jelöljük egyforma betűkkel azokat a számokat, amelyek 3-mal való osztáskor ugyanannyi maradékot adnak. Ezek a számok az alábbi 4 módon rendezhetők el.

a	*b*	*c*
b	*c*	*a*
c	*a*	*b*

a	*b*	*c*
c	*a*	*b*
b	*c*	*a*

a	*b*	*c*
a	*b*	*c*
a	*b*	*c*

a	*a*	*a*
b	*b*	*b*
c	*c*	*c*

Mivel a három számcsoport ($\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$ és $\{3, 6, 9\}$) összesen 6-féleképpen (3!) jelölhető az a, b és c betűkkel, és egy-egy csoportból a három szám 6-féleképpen helyezhető el a három helyre, ezért a betűk $6\cdot(6\cdot6\cdot6)$, azaz 6^4-féleképpen helyettesíthetők az adott számokkal. Tehát a táblázat $4\cdot6^4$-féleképpen tölthető ki a feladatnak megfelelően.