



INTEGRAL KUP 2020

Online, 28. novembar 2020.

Rešenja zadataka – 1. i 2. razred

I ALGEBRA I BROJEVI

Broj zadatka	1	2	3
Tačan odgovor	C	D	D

Zadatak 4. Krenimo od tačne jednakosti $5^3 - 5^2 = 10^2$. Ako tu jednakost pomnožimo sa 5^{2k} , gde je k proizvoljan prirodan broj, dobijamo jednakost $5^{2k} \cdot 5^3 - 5^{2k} \cdot 5^2 = 5^{2k} \cdot 10^2$, koja je ekvivalentna sa $5^{2k+3} - 5^{2k+2} = (5^k \cdot 10)^2$. Primitimo da su $2k + 3, 2k + 2, 5^k \cdot 10$ prirodni brojevi. Iz poslednje jednakosti zaključujemo da za uređenu trojku prirodnih brojeva $(x, y, z) = (2k + 3, 2k + 2, 5^k \cdot 10)$ važi jednakost $5^x - 5^y = z^2$. Kako je skup

$$\{(x, y, z) \mid x = 2k + 3 \wedge y = 2k + 2 \wedge z = 5^k \cdot 10 \wedge k \in \mathbb{N}\}$$

(\mathbb{N} je skup prirodnih brojeva) beskonačan, to dobijamo da je iskaz iz zadatka tačan.

II GEOMETRIJA

Broj zadatka	1	2	3
Tačan odgovor	E	C	B

Zadatak 4. Neka je k proizvoljan prirodan broj. Kako za brojeve $3k, 4k, 5k$ važi $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$, zaključujemo da postoji trougao čije stranice imaju merne brojeve $3k, 4k, 5k$ (što su prirodni brojevi) kao i da je taj trougao pravougli. Obim ovog trougla je $12k$. Pa ako za k uzmemo prirodan broj 12^{2019} , dobijamo da taj trougao ispunjava uslove zadatka, kao i da je njegov obim $12 \cdot 12^{2019} = 12^{2020}$, što je 2020-i stepen nekog prirodnog broja. Dakle, odgovor na postavljeno pitanje je potvrđan.

III KOMBINATORIKA

Broj zadatka	1	2	3
Tačan odgovor	E	D	D

Zadatak 4. Ako se istim slovima obeleže dati brojevi koji imaju isti ostatak pri deljenju sa 3, onda se ti brojevi jedino mogu poredjati na neki od sledeća 4 načina:

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
b	c	a

a	b	c
a	b	c
a	b	c

a	a	a
b	b	b
c	c	c

Kako tri grupe brojeva ($\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$ i $\{3, 6, 9\}$) mogu na $3!$ načina biti obeležene slovima a , b i c , i kako za svako slovo, tri broja iz odgovarajuće grupe mogu menjati mesta na $3!$ načina, to dobijamo da se slova mogu zameniti datim brojevima na $6 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6)$, tj. 6^4 načina. Dakle, ukupan broj načina da se popuni tabela je $4 \cdot 6^4$.