ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО
ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

ИНТЕГРАЛ КУП 2020

Online, 28. новембар 2020.

Решења задатака – 6. разред

I Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Д**	**Б**	**Г**

Задатак 4. Ако из датог скупа избацимо нулу и преостале елементе поделимо на два скупа $A = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, 3\}$ и $B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (приметимо да A и B немају заједничких елемената и да им је унија једнака датом скуп без нуле). Означимо са a и b производе елемената скупова A и B, редом. Како је

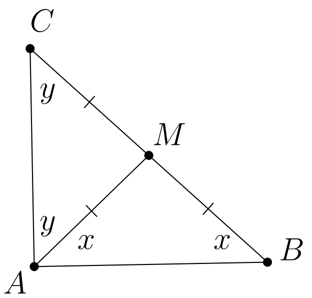
$$\begin{aligned} a &= (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(-7)\cdot(-8)\cdot 3\\ &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 3\\ &= 1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 \quad \text{(помножили трећи и последњи чинилац)}\\ &= b\,, \end{aligned}$$

то добијамо да је $a = b$, па је одговор на постављено питање је потврдан.

II Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**А**	**Б**	**Б**

Задатак 4. Ако су AB и AC основице једнакокраких троуглова ABM и ACM, редом, онда је $\measuredangle BAC = 90^\circ$.

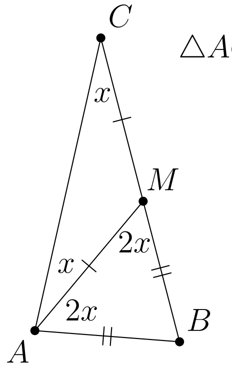


$x + x + y + y = 180^\circ$ (збир ун. углова троугла ABC)

$x + y = 90^\circ$ тј. $\measuredangle BAC = 90^\circ$

Како је у задатку дато да је $\measuredangle BAC = 78°$, закључујемо да не могу истовремено AB и AC бити основице једнакокраких троуглова ABM и ACM, редом.
Углови AMB и AMC суплементни и не може бити $\measuredangle AMB = \measuredangle AMC = 90°$ (јер би тада AB и AC биле основице једнакокраких троуглова ABM и ACM, редом), па су преостала следећа два случаја:

$1°$: $\measuredangle AMB$ је оштар и $\measuredangle AMC$ је туп. Закључујемо да је AC основица једнакокраког троугла AMC, па основице троугла ABM једино могу бити дужи AM и BM.
Ако је основица дуж AM, онда имамо:



$\triangle ACM$ - збир два ун. угла троугла једнак је спољашњем код трећег темена

$\measuredangle AMB = 2x$

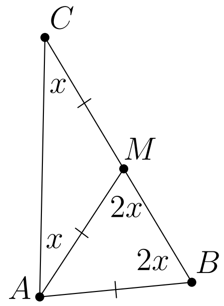
$x + 2x = \measuredangle BAC = 78°$

$3x = 78°$

$x = 26°$

$\measuredangle ACB = x = 26°$, $\measuredangle ABC = 180° - (78° + 26°) = 76°$

Ако је основица дуж BM, онда имамо:



$78° + 2x + x = 180°$ (збир ун. углова троугла ABC)

$3x = 102°$

$x = 34°$

$\measuredangle ACB = x = 34°$, $\measuredangle ABC = 2x = 68°$

$2°$: $\measuredangle AMB$ је туп и $\measuredangle AMC$ је оштар. Ово је очигледно симетрично случају $1°$ у смислу да су тачке B и C замениле улоге па се добијају још два решења $\measuredangle ACB = 76°$, $\measuredangle ABC = 26°$ или $\measuredangle ACB = 68°$, $\measuredangle ABC = 34°$.

Дакле, укупно има четири решења и она су приказана у следећој табели:

$\measuredangle BAC$	$\measuredangle ABC$	$\measuredangle ACB$
78°	76°	26°
78°	68°	34°
78°	26°	76°
78°	34°	68°

III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**A**	**B**	**B**

Задатак 4. Најпре имамо да је $\frac{2}{5} = 0{,}4$ и $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Означимо са a, b, c, d и f бројеве које треба да одредимо (види први од наредна четири магична квадрата).

d	0,4	c
e	a	f
0,7	b	0,5

d	0,4	c
e	0,8	f
0,7	b	0,5

1,1	0,4	0,9
e	0,8	f
0,7	1,2	0,5

1,1	0,4	0,9
0,6	0,8	1
0,7	1,2	0,5

Из $0{,}4 + a + b = 0{,}7 + b + 0{,}5$ добијамо $0{,}4 + a = 0{,}7 + 0{,}5$, а из чега добијамо да је $a = 0{,}8$ (други магични квадрат). Сада имамо да је 0,8 аритметичка средина од 0,4 и b; 0,7 и c; 0,5 и d; одакле добијамо да је $b = 1{,}2$; $c = 0{,}9$; $d = 1{,}1$; (трећи магични квадрат). Како је карактеристични збир једнак 2,4 (нпр. $0{,}4+0{,}8+1{,}2$), то добијамо да је $e = 2{,}4 - (0{,}7 + 1{,}1) = 0{,}6$ и $f = 2{,}4 - (0{,}9 + 0{,}5) = 1$. Овим смо одредили све бројеве који су недостајали (четврти магични квадрат).