ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО
ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

ИНТЕГРАЛ КУП 2020

Online, 28. новембар 2020.

Решења задатака – 7. и 8. разред

I Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Г**	**А**	**Д**

Задатак 4. Означимо са s мерни број траженог растојања мереног у километрима. У почетку, бициклиста је прешао 15 km за пола сата, што значи да је возио просечном брзином 30 km/h. Време потребно да се пређе пут $(s-15)$ km возећи том просечном брзином је $\frac{s-15}{30}$ h, док време потребно да се пређе исти тај пут возећи просечном брзином 40 km/h $(40 = 30 + 10)$ је $\frac{s-15}{40}$ h. Према подацима из задатка закључујемо да је $\frac{s-15}{30}$ веће од $\frac{s-15}{40}$ за $1\frac{1}{4}$ ($1\,\mathrm{h} + 15\,\mathrm{min} = 1\frac{1}{4}\,\mathrm{h}$), па отуда добијамо једначину

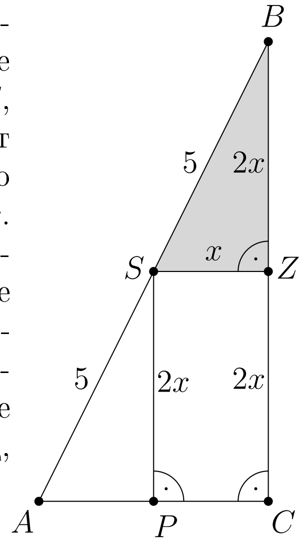
$$\frac{s-15}{30} - \frac{s-15}{40} = 1\frac{1}{4}\,,$$

чијим решавањем добијамо да је $s = 165$. Дакле, одговор је 165 km.

II Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**В**	**Б**	**В**

Задатак 4. На датој слици (десно) дужи AB, CB и AC представљају мердевине, зид и под, редом. Тачка S је средиште мердевина, док су P и Z подножја нормала из S на AC и BC, редом. Дакле, дужине дужи SP и SZ представљају удаљеност средишта мердевина од пода и зида, редом. Како је SP дупло веће од SZ, то ако дужину SZ означимо са x, важиће $SP = 2x$. Из $SZ \parallel AC$ и S је средиште од AB, добијамо да је SZ средња линија троугла ACB која одговара страници AC, а одатле добијамо да је Z средиште од BC. Како је $SPCZ$ правоугаоник, то је $SP = ZC$. Сада имамо да је $ZC = ZB = 2x$. Питагорина теорема примењена на правоугли троугао SZB даје једнакост $x^2 + (2x)^2 = 5^2$, из које добијамо $x = \sqrt{5}$. Најзад, $CB = 4x = 4\sqrt{5}$, па је тражена висина једнака $4\sqrt{5}\,\mathrm{m}$.



III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**В**	**Г**	**В**

Задатак 4. Производ цифара неког природног броја је једнак 0 ако и само ако је бар једна његова цифра једнака 0.

а) Потребно је одредити колико има десетоцифрених бројева који имају бар једну цифру једнаку 0. Тај број ћемо добити када од броја свих дестоцифрених бројева одузмемо број десетоцифрених бројева којима ниједна цифра није једнака 0 . Дакле, одговор је $9 \cdot 10^9 - 9^{10}$.

б) Ако су све цифре у десетоцифреном броју различите, онда ће једна од њих бити једнака 0, па је потребно одредити колико има десетоцифрених бројева којима су све цифре различите. Њих има $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.