PODRUŽNICA MATEMATIČARA VALJEVO
VALJEVSKA GIMNAZIJA

INTEGRAL KUP 2020

Online, 28. november 2020

Naloge na turnirju so razdeljene v tri skupine: I ALGEBRA IN ŠTEVILA, II GEOMETRIJA IN III KOMBINATORIKA. Iz vsake skupine so dane tri naloge, ki se rešujejo z obkroževanjem ene od ponujenih rešitev, in ena naloga, ki jo je potrebno podrobno obrazložiti. Naloge z obkroževanjem se točkujejo s 5 točkami, naloge, ki se podrobneje rešujejo, pa se točkujejo z 10 točkami. V vsaki nalogi z obkroževanjem je ponujenih pet možnih odgovorov (A, B, C, D, E), od katerih je samo en pravilen, in odgovor N (ne vem). Obkroževanje samo odgovora N ne prinaša niti negativnih niti pozitivnih točk. V primeru obkroževanja nepravilnega odgovora ali v primeru, da se obkroži več kot en odgovor, ter v primeru, ko ni obkrožen niti en odgovor, se tekmovalec kaznuje z odvzemom 1 točke. Čas za reševanje nalog je 150 minut.

1. in 2. razred

ALGEBRA IN ŠTEVILA

1. S koliko ničlami se končuje število $16^5 \cdot 5^{16} + 4^{25} \cdot 25^4$?

(A) 4 (B) 5 (C) 8 (D) 15 (E) 16 (N) Ne vem

2. Naj bo S množica vseh tromestnih naravnih števil, ki so deljiva z 12 in imajo natanko 12 deliteljev. Koliko elementov je v množici S ?

(A) 12 (B) 17 (C) 19 (D) 20 (E) 21 (N) Ne vem

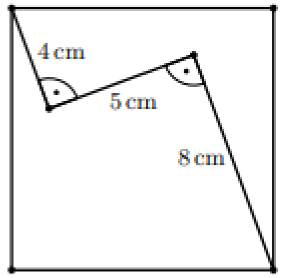
3. Kolikšna je vsota realnih števil x in y, za kateri velja $5x^2 + 8xy + 8y^2 \le 12x - 12$?

(A) –5,8 (B) –1 (C) 0 (D) 1 (E) 1,25 (N) Ne vem

4. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo urejenih trojic naravnih števil (x, y, z) , za katere velja $5^x - 5^y = z^2$.

GEOMETRIJA

1. Kolikšna je ploščina kvadrata, ki je prikazan na sliki?



(A) 42,25 cm^2 (B) 64 cm^2 (C) 72,25 cm^2 (D) 81 cm^2 (E) 84,50 cm^2 (N) Ne vem

2. Točka E je razpolovišče stranice BC pravokotnika $ABCD$, kjer je $|AB| = 2$, premica skozi DE pa je tangenta krožnice, opisane nad premerom AB. Koliko je $|BC|$?

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{5}{4}$ (N) Ne vem

3. Naj bodo E, F, G in H razpolovišča stranic AB, BC, CD in DA (v istem vrstnem redu) konveksnega štirikotnika $ABCD$ in I presečišče daljic EG in FH. Ploščine štirikotnikov $AEIH$, $BFIE$ in $CGIF$ naj bodo v tem vrstnem redu 8, 16 in 20. Kolikšna je ploščina štirikotnika $DHIG$| ?

(A) 28 (B) 12 (C) 4 (D) 40 (E) 10 (N) Ne vem

4. Dolžine stranic pravokotnega trikotnika so naravna števila. Ali je lahko obseg tega trikotnika enak n^{2020}, kjer je n naravno število?

KOMBINATORIKA

1. Koliko je urejenih parov s celoštevilčnima koordinatama v množici $[\pi, 3\pi] \times [2\pi, 8\pi]$?

(A) 54 (B) 57 (C) 90 (D) 108 (E) 114 (N) Ne vem

2. Digitalna ura kaže čas v obliki $h : m : s$, kjer so h, m in s cela števila, in je $0 \leq h \leq 23$, $0 \leq m \leq 59$ in $0 \leq s \leq 59$. Kolikokrat v enem dnevu bo ura pokazala čas $h : m : s$, za katerega je $h + s = m$?

(A) 1104 (B) 1127 (C) 1152 (D) 1164 (E) 1770 (N) Ne vem

3. Na stranicah AB, BC in CA trikotnika ABC je v tem zaporedju danih 3, 4 oziroma 5 točk, med katerimi ni nobena oglišče trikotnika. Koliko je vseh trikotnikov, katerih oglišča so neka trojica teh danih točk?

(A) 60 (B) 135 (C) 175 (D) 205 (E) 350 (N) Ne vem

4. Na koliko načinov je mogoče števila 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9 razporediti v polja tabele 3×3 tako, da je vsota števil v vsaki vrsti, v vsakem stolpcu in v vsaki diagonali deljiva s 3

Rešitve nalog:

I ALGEBRA IN ŠTEVILA

1. C

2. D

3. D

4. Začnimo z enakostjo $5^3 - 5^2 = 10^2$. Če to enačbo pomnožimo z 5^{2k}, kjer je k poljubno naravno število, dobimo enakost $5^{2k} \cdot 5^3 - 5^{2k} \cdot 5^2 = 5^{2k} \cdot 10^2$ oziroma $5^{2k+3} - 5^{2k+2} = (5^k \cdot 10)^2$. Opazimo, da so $2k + 3$, $2k + 2$, $5^k \cdot 10$ naravna števila. Iz zadnje enačbe sklepamo, da za urejeno trojico naravnih števil $(x, y, z) = (2k + 3, 2k + 2, 5^k \cdot 10)$ velja $5^x - 5^y = z^2$. Ker je množica

$$\{(x, y, z)\ ;\ x = 2k + 3 \ \wedge\ y = 2k + 2 \ \wedge\ z = 5^k \cdot 10 \ \wedge\ k \in \mathbb{N}\}$$

neskončna, je s tem dokazana tudi trditev v nalogi.

II GEOMETRIJA

1. E

2. C

3. B

4. Naj bo k poljubno naravno število. Ker za števila $3k$, $4k$ in $5k$ velja $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$, sklepamo, da obstaja trikotnik, katerega dolžine stranic so $3k$, $4k$ in $5k$ (kar so naravna števila), in da je ta trikotnik pravokoten. Obseg tega trikotnika je $12k$. Če izberemo $k = 12^{2019}$, opazimo, da ta trikotnik izpolnjuje pogoje iz naloge, in da je njegov obseg $12 \cdot 12^{2019} = 12^{2020}$, kar je oblike n^{2020}, kjer je n naravno število. Odgovor na vprašanje v nalogi je torej pritrdilen.

III KOMBINATORIKA

1. E

2. D

3. D

4. Denimo, da v rešitvi enake črke označujejo tista med danimi števili, ki imajo enak ostanek pri deljenju s 3. Dana števila lahko tedaj razporedimo na enega od teh štirih načinov:

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
b	c	a

a	b	c
a	b	c
a	b	c

a	a	a
b	b	b
c	c	c

Tri številske množice $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$ in $\{3, 6, 9\}$ lahko označimo s črkami a, b in c na 3! načinov. Pri vsaki črki se lahko števila v množici, označeni s to črko, razporedijo na 3! načinov. Tako je $6 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6^4$ vseh možnih načinov, da črka označuje število. Vseh različnih razporeditev števil v tabelo je torej $4 \cdot 6^4$.