PODRUŽNICA MATEMATIČARA VALJEVO
VALJEVSKA GIMNAZIJA

INTEGRAL KUP 2021

Online, 4. decembar 2021.

Rešenja zadataka – 1. i 2. razred

I Algebra i brojevi

Broj zadatka	1	2	3
Tačan odgovor	**C**	**B**	**E**

Zadatak 4. Neka je n broj koji je jednak zbiru dva ili više uzastopnih prirodnih brojeva. Tada postoje $i \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) i $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ takvi da važi $n = (i+1) + \ldots + (i+k)$. Kako važi

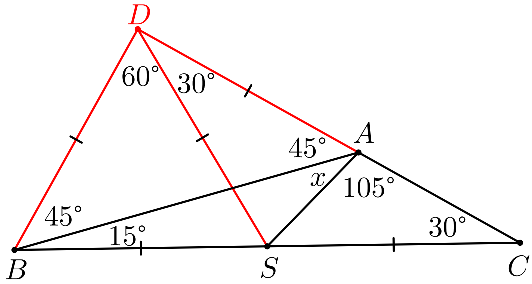
$$(i+1)+\ldots+(i+k) = k\cdot i+(1+\ldots+k) = k\cdot i+\frac{k\cdot(k+1)}{2} = \begin{cases} \dfrac{k}{2}\cdot(2i+k+1), & \text{ako } 2 \mid k; \\ k\cdot\left(i+\dfrac{k+1}{2}\right), & \text{ako } 2 \nmid k, \end{cases}$$

to zaključujemo da n ima neparan činilac veći od 1 (ako je k parno, taj činilac je $2i+k+1$, a ako je k neparno, taj činilac je k), pa nije jednak stepenu broja 2.

II Geometrija

Broj zadatka	1	2	3
Tačan odgovor	**A**	**B**	**D**

Zadatak 4.



Iz trougla ABC imamo da je $\measuredangle BAC = 180^\circ - (15^\circ + 30^\circ) = 135^\circ$. Neka je D podnožje normale iz tačke B na pravu AC. Kako je ugao $\measuredangle BAC$ tup, to na pravoj AC važi raspored $D - A - C$, pa je ugao BAD spoljašnji ugao trougla ABC kod temena A, odakle dobijamo $\measuredangle BAD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. Sada iz pravouglog trougla BAD dobijamo

$\measuredangle ABD = \measuredangle BAD$, a time i $AD = BD$. Kako je S središte hipotenuze BC pravouglog trougla BDC, to važi $SB = SC = SD$. Iz $SC = SD$ sledi $\measuredangle SDC = \measuredangle SCD$, a kako je raspored $D - A - C$ i $B - S - C$, to imamo $\measuredangle SDA = \measuredangle SDC$, $\measuredangle SCD = \measuredangle SCA$ i $\measuredangle SCA = \measuredangle BCA$, pa je $\measuredangle SDA = \measuredangle SCD = 30°$. Kako je raspored $B - S - C$, to je $\measuredangle BDC = \measuredangle BDS + \measuredangle SDC$, pa je $\measuredangle BDS = 90° - 30° = 60°$. Iz $SD = SB$ i $\measuredangle BDS = 60°$ sledi da je BDS jednakostranični trougao, pa je $BD = SD$. Iz $AD = BD$ i $BD = SD$ sledi $AD = SD$, a iz toga sledi $\measuredangle ASD = \measuredangle SAD$. Sada iz trougla SAD dobijamo da je $\measuredangle SAD = (180° - 30°) : 2 = 75°$. Zbog rasporeda $D - A - C$ imamo da je $\measuredangle SAC = 180° - \measuredangle SAD = 105°$, a zbog rasporeda $B - S - C$ da je $\measuredangle BAC = \measuredangle BAS + \measuredangle SAC$, odakle dobijamo $\measuredangle BAS = 135° - 105° = 30°$.

III Kombinatorika

Broj zadatka	1	2	3
Tačan odgovor	**C**	**B**	**B**

Zadatak 4. Kako $f(4), f(1), f(2), f(20)$ i $f(21)$ pripadaju skupu C to mora važiti

$$4 \leq f(2) \leq f(20) < f(4) \leq f(1) < f(21) \leq 21.$$

Sada zbog $4 < f(4) < 21$ i $f(4)$ deljivo sa 7 važi $f(4) = 7$ ili $f(4) = 14$.

Zbog $f(2) \leq f(20)$ važiće da su vrednosti $f(2)$ i $f(20)$ jedinstveno određene skupom $\{f(2), f(20)\}$. Isto važi i za vrednosti $f(1), f(21)$.

Ako je $f(4) = 7$, onda važi $4 \leq f(2) \leq f(20) < 7 \leq f(1) < f(21) \leq 21$, pa zaključujemo da je $\{f(2), f(20)\}$ dvočlan ili jednočlan podskup skupa $\{4, 5, 6\}$, a skup $\{f(1), f(21)\}$ dvočlan podskup skupa $\{7, 8, \ldots, 21\}$. Kako skup $\{4, 5, 6\}$ ima ukupno $\frac{3\cdot 2}{2} + 3 = 6$ dvočlanih ili jednočlanih podskupova, a skup $\{7, 8, \ldots, 21\}$ ima tačno $\frac{15\cdot 14}{2} = 105$ dvočlanih podskupova, to vrednosti za $f(2)$ i $f(20)$ možemo izabrati na 6 načina, a vrednosti za $f(1)$ i $f(21)$ na 105 načina, što nam daje $6 \cdot 105 = 630$ različitih funkcija.

Ako je $f(4) = 14$, onda važi $4 \leq f(2) \leq f(20) < 14 \leq f(1) < f(21) \leq 21$, pa je $\{f(2), f(20)\}$ dvočlan ili jednočlan podskup skupa $\{4, 5, \ldots, 13\}$, a skup $\{f(1), f(21)\}$ dvočlan podskup skupa $\{14, 15, \ldots, 21\}$. Skup $\{4, 5, \ldots, 13\}$ ima ukupno $\frac{10\cdot 9}{2} + 10 = 55$ dvočlanih ili jednočlanih podskupova, a skup $\{14, 15, \ldots, 21\}$ ima tačno $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ dvočlanih podskupova, pa vrednosti za $f(2)$ i $f(20)$ možemo izabrati na 55 načina, a vrednosti za $f(1)$ i $f(21)$ na 28 načina, što nam daje novih $55 \cdot 28 = 1540$ funkcija.

Dakle, traženi broj funkcija je $630 + 1540 = 2170$.