



ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО
ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

ИНТЕГРАЛ КУП 2021

Online, 4. децембар 2021.

Задаци на турниру су подељени у три целине: I АЛГЕБРА И БРОЈЕВИ, II ГЕОМЕТРИЈА И III КОМБИНАТОРИКА. У свакој целини дата су три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. Задаци са вишеструким избором вреде по 5 поена, док задаци који се детаљно решавају вреде по 10 поена. У сваком задатку са вишеструким избором понуђено је пет одговора (А, Б, В, Г, Д) од којих је само један тачан и одговор Н (не знам). Заокруживање само одговора Н не доноси ни негативне ни позитивне поене. У случају заокруживања нетачног одговора или заокруживања више од једног одговора, као и у случају да се не заокружи ни један одговор, добија се -1 поен. Време за израду задатака је 150 минута.

7. и 8. разред

I АЛГЕБРА И БРОЈЕВИ

1. Ако је $\frac{x+y}{y} = 3$, онда је вредност израза $\frac{3x}{x+2y}$ једнака:
(А) $\frac{3}{2}$ (Б) $\frac{3}{5}$ (В) $\frac{2}{3}$ (Г) $\frac{5}{3}$ (Д) 2 (Н) Не знам
2. Највећи степен броја 3 који дели број 360^{2021} је:
(А) 3^{2021} (Б) 3^{360} (В) 3^{4042} (Г) 3^{6063} (Д) 3^2 (Н) Не знам
3. Ако се бројилац неког нескративог разломка смањи за 15%, а именилац повећа за 15%, добиће се разломак који је за 2 мањи од почетног разломка. Збир бројиоца и имениоца почетног разломка је:
(А) 15 (Б) 18 (В) 22 (Г) 24 (Д) 26 (Н) Не знам
4. Доказати да је вредност израза

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$$

већа од 0 и мања од 1.

II ГЕОМЕТРИЈА

1. Троугао ABC је правоугли са катетама $AC = 20$ и $BC = 15$. Четвороугао $CMNP$ је квадрат, при чему тачке M , N и P редом припадају дужима AC , AB и BC . Страница квадрата $CMNP$ је:

(А) $\frac{20}{3}$ (Б) $\frac{15}{2}$ (В) $\frac{60}{7}$ (Г) 10 (Д) 12 (Н) Не знам

2. Колика је дужина странице AB четвороугла $ABCD$ ако важи

$$\angle BAD = 45^\circ, \quad \angle ABC = 90^\circ, \quad \angle CDA = 105^\circ, \quad AD = \sqrt{6} \quad \text{и} \quad BC = 1?$$

(А) $\sqrt{3}$ (Б) 3 (В) $2\sqrt{3}$ (Г) $2 + \sqrt{3}$ (Д) $3 + \sqrt{3}$ (Н) Не знам

3. Тачка N је подножје нормале из темена A на дијагоналу BD правоугаоника $ABCD$. Ако је $AN : BD = 6 : 13$ и $AB > BC$, онда је $AB : BC$ једнако:

(А) 4 : 3 (Б) 3 : 2 (В) 5 : 3 (Г) 6 : 5 (Д) 2 : 1 (Н) Не знам

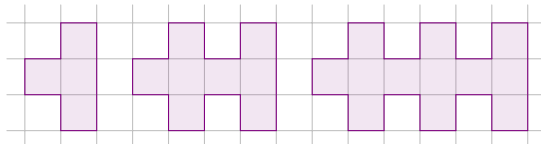
4. Нека је $ABCD$ четвороугао такав да важи

$$AB \parallel CD, \quad \angle CDA = 2 \cdot \angle ABC, \quad CD = 4 \quad \text{и} \quad DA = 12.$$

Одредити све целобројне обиме које може имати четвороугао $ABCD$.

III КОМБИНАТОРИКА

1. На слици је приказана квадратна мрежа и у њој прва три члана бесконачног низа фигура. Ако први члан низа има обим 10, који од наведених бројева представља обим фигуре из датог низа?



(А) 2020 (Б) 2022 (В) 2024 (Г) 2026 (Д) 2028 (Н) Не знам

2. Колико има десетоцифрених природних бројева са различитим цифрама код којих сваке две суседне цифре нису исте парности?

(А) 11 520 (Б) 14 400 (В) 23 040 (Г) 25 920 (Д) 28 800 (Н) Не знам

3. Колико постоји различитих лозинки са четири карактера (симбола) који припадају скупу $\{P, M, V, 2, 0, 1, \#\}$, а да се при томе завршавају са словом и садрже бар једну цифру? (Карактери у лозинци се могу понављати.)

(А) 378 (Б) 387 (В) 738 (Г) 783 (Д) 837 (Н) Не знам

4. Неке од страна коцке су обојене зеленом бојом, а затим је коцка подељена на извештан број мањих коцака исте запремине. Колики је број страна коцке који је обојен зеленом бојом, ако се зна да је број мањих коцака чија ниједна страна није обојена зеленом бојом једнак 45?