ПОДРУЖНИЦА МАТЕМАТИЧАРА ВАЉЕВО
ВАЉЕВСКА ГИМНАЗИЈА

ИНТЕГРАЛ КУП 2021

Online, 4. децембар 2021.

Решења задатака – 7. и 8. разред

I Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**А**	**В**	**Д**

Задатак 4. Дати израз је једнак збиру

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right),$$

чији је сваки сабирак већи од 0 (за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>0$), па је вредност датог израза већа од 0.

Са друге стране, дати израз је једнак збиру

$$1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{998}+\frac{1}{999}\right)+\left(-\frac{1}{1000}\right),$$

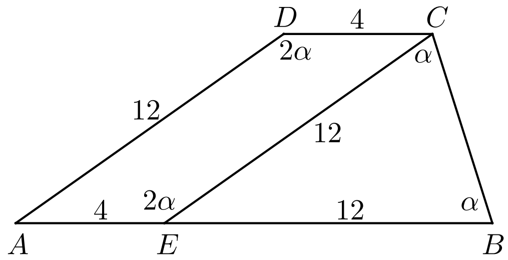
чији је сваки сабирак сем првог мањи од 0 (за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}<0$), а први сабирак је 1. Дакле, дати израз је једнак збиру броја 1 и негативног броја (збир свих сабирака посматраног збира сем првог сабирка), па је његова вредност мања од 1.

II Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**В**	**Б**	**Б**

Задатак 4. Означимо са p праву паралелну са AD која садржи тачку C, а са E тачку пресека правих p и AB. Четвороугао $AECD$ је паралелограм јер су му наспрамне странице паралелне. Одатле добијамо да је $EC = AD = 12$, $AE = CD = 4$ и $\measuredangle AEC = \measuredangle CDA = 2\cdot\measuredangle ABC$. Како је $\measuredangle CDA+\measuredangle DCB > 180^\circ$ (јер $\measuredangle CDA > \measuredangle ABC$ и $\measuredangle ABC+\measuredangle DCB = 180^\circ$), важиће да права CE сече страницу AB четвороугла $ABCD$,

тј. важиће распоред $A - E - B$. Из $A - E - B$ добијамо да је AEC спољашњи угао код темена E троугла EBC као и да је $AE + EB = AB$. Из троугла EBC имамо $\measuredangle EBC + \measuredangle ECB = \measuredangle AEC$, тј. $\measuredangle ABC + \measuredangle ECB = 2\measuredangle ABC$, одакле добијамо да је $\measuredangle ECB = \measuredangle ABC = \measuredangle EBC$. Из $\measuredangle ECB = \measuredangle EBC$, следи да је $EB = EC$, па је $AB = 4 + 12 = 16$. Како су дужине дужи AB, CD и AD целобројне то је обим четвороугла $ABCD$ целобројан акко важи да је дужина дужи BC целобројна. Из троугла EBC добијамо једини услов за страницу BC, а то је $BC < 12 + 12 = 24$. Како је $AB + CD + DA = 32$, то закључујемо да су елементи скупа $\{33, 34, \ldots, 55\}$ сви целобројни обими које четворугао $ABCD$ може имати.



III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одговор	**Г**	**Г**	**Д**

Задатак 4. Нека је n број једнаких делова на које је подељена свака ивица коцке. То значи да је број мањих коцака n^3. Како је $n^3 \geq 45$, следи $n \geq 4$. Ако је коцка подељена на n^3 мањих коцака, то су "унутрашње"коцке, а таквих је $(n-2)^3$, сигурно необојене. Из $(n-2)^3 \leq 45$ следи $n \leq 5$. У случају $n = 4$, бојењем једне стране коцке необојених остаје 48, а бојењем две стране коцке, највише 36, па је тај случај немогућ. У случају $n = 5$, провером се установљава да услове задатка испуњава коцка којој су обојене четири, а необојене две наспрамне стране.