Подружница математичара Ваљево
Ваљевска гимназија

МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР „ИНТЕГРАЛ КУП”

Ваљево, 02. 12. 2017.

Задаци на турниру су подељени у три целине: I алгебра и бројеви, II геометрија и III комбинаторика. У оквиру сваке целине дата су по три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. У сваком задатаку са вишеструким избором понуђено је пет одговора (**А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак, треба да заокружи слово **Н**. Ако је заокружен само тачан одговор добија се 5 поена, ако је заокружен нетачан одговор добија се -1 поен, ако је заокружено само слово **Н** добија се 0 поена. Задаци који нису са вишеструким избором вреде 10 поена. На тесту се може освојити највише 75 поена. Време за израду задатака је 150 минута.

1. и 2. разред

I Алгебра и бројеви

1. Цена једног производа је повећана за $x\%$, а затим смањена за $y\%$ и након тога је добијена цена која је једнака почетној цени. Колико је y?

(А) $y = \dfrac{100x}{x+100}$ (Б) $y = \dfrac{100-x}{100+x}$ (В) $y = x$ (Г) $y = \dfrac{90x}{101}$ (Д) $y = \dfrac{100-x}{100x}$ (Н) Не знам

2. Нека је $A = \{1,2,3,4\}$. Број различитих функција $f : A \to A$ за које важи $f(f(x)) = x$ је:

(А) 3 (Б) 6 (В) 9 (Г) 10 (Д) 16 (Н) Не знам

3. Збир неког броја, збира његових цифара и збира цифара његовог збира цифара је 60. Таквих бројева има:

(А) 2 (Б) 3 (В) 4 (Г) 5 (Д) више од 5 (Н) Не знам

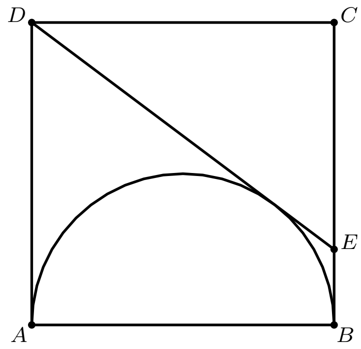
4. Одреди највећи природан број n такав да је број $n^2 + 2017$ дељив са $n + 17$.

II Геометрија

1. У троуглу ABC је $BC = a = 5$, $AC = b = 7$ и $h_a + h_b = h_c$. Страница $AB = c$ једнака је:

(А) $\dfrac{7}{5}$ (Б) $\dfrac{5}{2}$ (В) $\dfrac{12}{35}$ (Г) $\dfrac{12}{7}$ (Д) $\dfrac{35}{12}$ (Н) Не знам

2. У јединични квадрат $ABCD$ уписан је полукруг над пречником AB. Ако је DE тангента на овај полукруг, колика је површина троугла CDE? (Видети слику.)



(А) $\dfrac{3}{10}$ (Б) $\dfrac{3}{8}$ (В) $\dfrac{1}{3}$ (Г) $\dfrac{5}{14}$ (Д) $\dfrac{1}{4}$ (Н) Не знам

3. Сви унутрашњи углови конвексног многоугла су по 160°, осим једног чија је мера x°. Најмањи цео број x за који овакав многоугао има паран број страница је:

(А) 10 (Б) 20 (В) 30 (Г) 40 (Д) 80 (Н) Не знам

4. Одредити све тачке M унутар троугла ABC, такве да су површине троуглова ABM, BCM и ACM једнаке.

III Комбинаторика

1. На фудбалском турниру учествује 8 тимова који играју сваки са сваким по једну утакмицу. За победу се добија 3 бода, а за нерешен резултат обе екипе добијају по 1 бод. Ако је познато да је после четири комплетно одиграна кола збир свих освојених бодова екипа био 41, број утакмица које су до тада завршене нерешеним резултатом је:

(А) 7 (Б) 6 (В) 5 (Г) 8 (Д) 4 (Н) Не знам

2. Колико има релација на скупу $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ које су рефлексивне?

(А) $5 \cdot 2^{20}$ (Б) 2^{25} (В) 20 (Г) $5 \cdot 2^{25}$ (Д) $2^5 \cdot 2^{15}$ (Н) Не знам

3. Разлика броја свих десетоцифрених бројева записаних различитим цифрама код кога су гледано слева на десно на непарним местима цифре поређане у растућем редоследу, а на парним местима у опадајућем редоследу и броја свих десетоцифрених бројева записаних различитим цифрама код кога су гледано слева на десно на непарним местима цифре поређане у опадајућем редоследу, а на парним местима у растућем редоследу је

(А) -126 (Б) 0 (В) 126 (Г) 252 (Д) ниједан од претходно понуђених одговора (Н) Не знам

4. На колико начина се реч КОМБИНАТОРИКА може поделити на ,,слогове” тако да сваки слог садржи бар један самогласник? *Примери неких разлагања су: КОМБИ-НАТОРИКА, КОМБИНАТОРИКА, КО-МБИН-А-ТОРИКА, КО-МБИ-НА-ТО-РИ-КА.*

ОДГОВОРИ И РЕШЕЊА

I Алгебра и бројеви

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**А**	**Г**	**Б**

Задатак 4. Исказ

$$n + 17 \mid n^2 + 2017 \tag{$*$}$$

еквивалентан је са једнакошћу

$$n^2 + 2017 = (n + 17) \cdot k$$

ако $k \in \mathbb{N}$. Наведена једнакост је еквивалентна са сваком од следећих једнакости

$$\begin{aligned} n^2 - 17^2 + 17^2 + 2017 &= (n + 17) \cdot k \\ (n - 17)(n + 17) + 2306 &= (n + 17) \cdot k \\ (n + 17) \cdot k - (n - 17)(n + 17) &= 2036 \\ (n + 17)(k - n + 17) &= 2036 \end{aligned} \tag{$**$}$$

Дакле исказ $(*)$ важи акко је једнакост $(**)$ тачна за неки природан број k. Највећи природан број n за који важи једнакост $(**)$ је онај за који за који важи $n + 17 = 2036$ и $k - n + 17 = 1$, тј. за $n = 2289$ и $k = 2273$. Дакле, тражени број је 2289.

II Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Д**	**Б**	**Г**

Задатак 4. Како је површина троугла ABM једнака трећини површине троугла ABC, то је дужина висине троугла ABM повучена из темена M једнака трећини дужине висине троугла ABC повучене из темена C, тј. $\frac{h_c}{3}$. Следи да M мора припадати прави паралелној AB на растојању $\frac{h_c}{3}$ од AB. Слично M мора припадати правој паралелној AC на растојању $\frac{h_b}{3}$, где је h_b дужина висине троугла ABC повучена из темена B, и правој паралелној BC на растојању $\frac{h_a}{3}$, где је h_a дужина висине троугла ABC повучена из темена A. Ако таква тачка M уопште постоји, мора припадати свим трима правама, што значи да би се те три праве морале сећи у једној тачки, и тачка М би била јединствена. Користећи Талесову теорему добија се да свака од три наведене праве пролази кроз тежиште троугла ABC, па је тражена тачка M тежиште.

III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**А**	**Д**	**А**

Задатак 4. Све тражене поделе речи се добијају када између два *суседна* самогласника ставимо тачно једну цртицу или је не ставимо уопште. Јасно је да различити начини на који ћемо то урадити дају различита разлагања. Између првог и другог самогласника имамо $3 + 1 = 4$ различита избора за цртицу (3 да се стави цртица и 1 да се не стави), док између другог и трећег, трећег и четвртог, четвртог и петог, петог и шестог самогласника имамо $2 + 1 = 3$ избора. Дакле решење је $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$.