Подружница математичара Ваљево
Ваљевска гимназија

# МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР „ИНТЕГРАЛ КУП”

*Ваљево, 03. 12. 2016.*

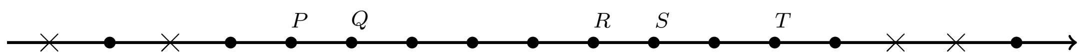
## КАТЕГОРИЈА 1 - ШЕСТИ РАЗРЕД

*Задаци на турниру су подељени у три целине: (I) алгебра и бројеви, (II) геометрија и (III) комбинаторика. У оквиру сваке целине дата су по три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. За сваки задатак са вишеструким избором понуђено је по пет одговора од којих је само један тачан. Потребно је заокружити слово испред тачног одговора. Тачан одговор у задацима са вишеструким избором вреди 5 поена, а у осталим задацима по 15 поена. На тесту се може освојити највише 90 поена.*

*Време за израду задатака је 150 минута.*

### (I) **Алгебра и бројеви**

1. На слици је приказан део бројевне праве, на којој су означени узастопни цели бројеви. Неке две од четири тачке означене са $\times$, одговарају бројевима који при дељењу са 4 дају остатке 1 и 2, а друге две одговарају бројевима који при дељењу са 5 дају остатке 1 и 2. Која од тачака $P$, $Q$, $R$, $S$ или $T$ одговара броју који при дељењу са 20 даје остатак 11?




(А) $P$ (Б) $Q$ (В) $R$ (Г) $S$ (Д) $T$

2. Збир неколико узастопних целих бројева је 2016. Највећи могући број сабирака је:

(А) 3 (Б) 6 (В) 4032 (Г) 4036 (Д) 8064

3. Збир и производ неколико природних бројева једнаки су $n$. Број $n$ може бити:

(А) 23 (Б) 16 (В) 37 (Г) 59 (Д) ништа од претходно понуђеног

4. Дешифровати множење

$$\overline{AA} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{ABC} = \overline{ABCABC},$$

где су $A$, $B$ и $C$ различите цифре.

## (II) **Геометрија**

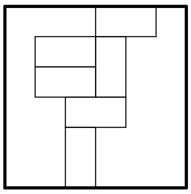
1. Ако је угао између симетрала два унутрашња угла троугла једнак $134^\circ$, онда је трећи унутрашњи угао тог троугла једнак:

   (А) $46^\circ$ (Б) $92^\circ$ (В) $60^\circ$ (Г) $136^\circ$ (Д) $88^\circ$

2. Ако су углови $\alpha$ и $\beta$ суплементни, а углови $\dfrac{\beta}{2}$ и $2016'$ комплементни, онда је $\alpha$ једнак:

   (А) $64^\circ 48'$ (Б) $65^\circ 12'$ (В) $67^\circ 12'$ (Г) $68^\circ 48'$ (Д) $123^\circ 36'$

3. У квадрат површине 144 $cm^2$ сложено је шест подударних правоугаоника као на слици. Колики је обим једног од тих правоугаоника?



   (А) 18 (Б) 12 (В) 6 (Г) 9 (Д) 14

4. На продужетку странице $AB$ троугла $ABC$, дата је тачка $M$ тако да је тачка $B$ између тачака $A$ и $M$ и важи $BM = BC$. Доказати да је права $MC$ паралелна симетрали угла $\angle ABC$.

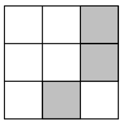
## (III) **Комбинаторика**

1. Пет ученика играју шаховски турнир на коме сваки играч са сваким игра по пет партија. Колико ће бити одиграно партија на турниру?
   (А) 25 (Б) 50 (В) 75 (Г) 100 (Д) 125

2. У кутији се налази 50 лоптица обележених бројевима од 1 до 50. Којих лоптица има највише?

   (А) Лоптица на којима је број већи од $4 \cdot 4$ и мањи од $4 \cdot 4 + 4 \cdot 4$.
   (Б) Лоптица са бројевима који су садржаоци броја 4.
   (В) Лоптица чији бројеви нису прости и садрже цифру 4.
   (Г) Лоптица на којима је број чији је збир цифара највише 4.
   (Д) Лоптица на којима је број чији је производ цифара највише 4.

3. На колико различитих начина се могу осенчити три поља квадратне мреже $3 \times 3$? На наредној слици дат је пример једног таквог сенчења.



   (А) 504 (Б) 729 (В) 81 (Г) 84 (Д) 168

4. Колико има четвороцифрених природних бројева чија је прва цифра паран број, друга цифра прост број, трећа цифра непаран број, а четврта цифра је дељива са 3?

Подружница математичара Ваљево
Ваљевска гимназија

# МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР „ИНТЕГРАЛ КУП”

*Ваљево, 03. 12. 2016.*

## КАТЕГОРИЈА 2 - СЕДМИ И ОСМИ РАЗРЕД

*Задаци на турниру су подељени у три целине: (I) алгебра и бројеви, (II) геометрија и (III) комбинаторика. У оквиру сваке целине дата су по три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. За сваки задатак са вишеструким избором понуђено је по пет одговора од којих је само један тачан. Потребно је заокружити слово испред тачног одговора. Тачан одговор у задацима са вишеструким избором вреди 5 поена, а у осталим задацима по 15 поена. На тесту се може освојити највише 90 поена.*

*Време за израду задатака је 150 минута.*

### (I) **Алгебра и бројеви**

1. Најмањи природан број $n$ за који је вредност израза $18^n \cdot \left(\dfrac{35}{810}\right)^3$ једнака природном броју је:

   (А) 3 (Б) 4 (В) 5 (Г) 6 (Д) 7

2. Одредити највећи број сабирака за који је једнакост

$$\overline{ZV} + \overline{ZV} + \ldots + \overline{ZV} = \overline{ZVRK}$$

   тачна. Различитим словима одговарају различите цифре, а истим словима исте цифре.

   (А) 96 (Б) 107 (В) 108 (Г) 109 (Д) 210

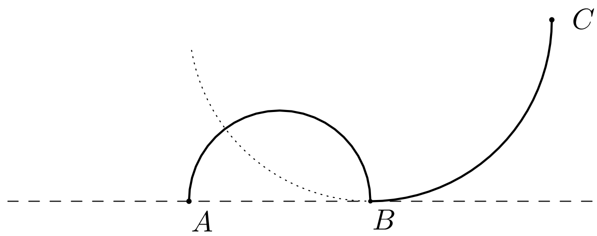
3. За природан број $n$ кажемо да је *„занимљив”* ако се може представити као $\dfrac{a \cdot b \cdot c}{d^2 \cdot e^2}$, где су $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$ различити природни бројеви. Колико има једноцифрених *„занимљивих”* природних бројева?

   (А) 5 (Б) 6 (В) 7 (Г) 8 (Д) 9

4. Одредити најмањи природан број $n$, такав да је $3n$ трећи степен неког природног броја, а $4n$ четврти степен неког природног броја.

## (II) **Геометрија**

1. Линија на слици је стаза кретања муве од тачке $A$ до тачке $C$. Стаза се састоји од два кружна лука, први од $A$ до $B$ је полукружница, а други од $B$ до $C$ је четвртина кружнице чија је права $AB$ тангента. Ако је најкраће растојање од $A$ до $C$ једнако $10\sqrt{2}\,\mathrm{m}$, а полупречник лука $BC$ дупло већи од полупречника лука $AB$, колико је приближно једнак збир полупречника ова два лука мерено у дециметрима?




(А) 91 (Б) 92 (В) 93 (Г) 94 (Д) 95

2. У осмоуглу $ABCDEFGH$ је $GH = 6\ cm$, а све остале странице су по $2\,\mathrm{cm}$. Шест његових унутрашњих углова су по $90°$, а два по $270°$. Површина петоугла $ADFGH$ изражена у $\mathrm{cm}^2$ је:

(А) 10 (Б) 14 (В) 18 (Г) 22 (Д) 24

3. Дужине две странице неког троугла су $7\dfrac{1}{5}$ и 9, а збир дужина висина које одговарају тим страницама једнак је дужини треће висине. Дужина треће странице тог троугла је:

(А) 3,2 (Б) 4,0 (В) 4,2 (Г) 5,0 (Д) 5,2

4. Дат је трапез $ABCD$ (чије су основице $AB$ и $CD$) обима 2016 и кружнице $k_1$ и $k_2$ чији су пречници краци $BC$ и $AD$, редом. Нека су $M \in k_1$ и $L \in k_2$ произвољне тачке ових кружница, колика је највеца могуца дужина дужи $ML$?

## (III) **Комбинаторика**

1. Осам играча играју свако са сваким по две партије шаха. Сваки играч за победу осваја 1 поен, за реми 0,5 поена, а за пораз се не добијају поени. Колико најмање поена треба да има неки играч да би се закључило да он сигурно има више поена од свих осталих играча појединачно?

(А) 7,5 (Б) 8 (В) 11,5 (Г) 13,5 (Д) 14

2. На колико начина 5 људи може да се смести у 7 хотела?

(А) 12785 (Б) 16780 (В) 16807 (Г) 78125 (Д) 78160

3. Колико има петоцифрених природних бројева чије су суседне цифре различите?

(А) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ (Б) $9 \cdot 8^4$ (В) $9^5$ (Г) $8^5$ (Д) $9^2 \cdot 8^3$

4. Колико има четвороцифрених природних бројева дељивих са 4, којима су све цифре различите?

Подружница математичара Ваљево
Ваљевска гимназија

# МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР „ИНТЕГРАЛ КУП”

*Ваљево, 03. 12. 2016.*

## КАТЕГОРИЈА 3 - ПРВИ И ДРУГИ РАЗРЕД

*Задаци на турниру су подељени у три целине: (I) алгебра и бројеви, (II) геометрија и (III) комбинаторика. У оквиру сваке целине дата су по три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. За сваки задатак са вишеструким избором понуђено је по пет одговора од којих је само један тачан. Потребно је заокружити слово испред тачног одговора. Тачан одговор у задацима са вишеструким избором вреди 5 поена, а у осталим задацима по 15 поена. На тесту се може освојити највише 90 поена.*

*Време за израду задатака је 150 минута.*

### (I) **Алгебра и бројеви**

1. Функција $B : N \to N$ слика број $n$ у број цифара броја $n$. Одредити колико је

$$B\left(B\left(\left(B\left(B\left(2015^{2016}\right)\right)\right)^{2017}\right)\right).$$

(А) 2 (Б) 3 (В) 4 (Г) 5 (Д) 6

2. Реконструисати дато дељење, а затим одредити колики је производ, не обавезно различитих, цифара $A$ и $B$.

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & * & * & A & B & * & * & : & * & * & * & = & * \; 8 \; * \\
- & * & * & * & * & & & & & & & & \\
\hline
 & & & * & * & * & & & & & & & \\
 & & - & * & * & * & & & & & & & \\
\hline
 & & & * & * & * & * & & & & & & \\
 & & - & * & * & * & * & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

(А) 0 (Б) 6 (В) 8 (Г) 42 (Д) 45

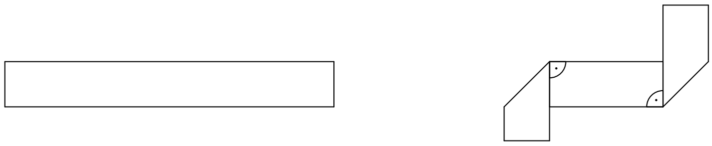
3. Збир $k$ узастопних природних бројева је једнак 66. Број различитих вредности за $k$ је:

(А) 0 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3 (Д) већи од 3

4. Доказати да за сваки природан број $k$ постоји $2k + 1$ узастопних природних бројева, таквих да је збир квадрата првих $k + 1$ од тих бројева једнак збиру квадрата наредних $k$ бројева.

## (II) **Геометрија**

1. Правоугаона трака страница 2 $cm$ и 10 $cm$ савијена је два пута као на слици. За колико је површина добијене фигуре мања од површине правоугаоне траке?



(А) 2 $cm^2$ (Б) 3 $cm^2$ (В) 4 $cm^2$ (Г) 1 $cm^2$ (Д) 5 $cm^2$

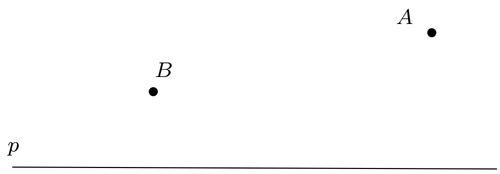
2. Ако је у троуглу $ABC$ угао $\beta$ туп и $AC = AH$ ($H$ ортоцентар троугла). Колика је мера угла $2\alpha + \gamma$?

(А) 45° (Б) 150° (В) 60° (Г) 120° (Д) 90°

3. Ако се број страница правилног многоугла повећа за 6, његов унутрашњи угао се повећа за 10°. За колико се повећа број дијагонала?

(А) 35 (Б) 117 (В) 50 (Г) 92 (Д) 81

4. Дата је права $p$ и тачке $A$ и $B$ са исте стране праве $p$, као на слици. Конструисати на правој $p$ тачку $X$, такву да је оштар угао који образују права $p$ и права одређена тачкама $B$ и $X$ дупло мањи од оштрог угла који образују права $p$ и права одређена тачкама $A$ и $X$.




## (III) **Комбинаторика**

1. Природних бројева који имају бар две цифре и код којих је свака цифра мања од претходне има:

(А) 1023 (Б) 1013 (В) 9! (Г) 1024 (Д) $9! - 10$

2. Број различитих начина на које могу да се изаберу два несуседна двоцифрена природна броја је:

(А) 3826 (Б) 3827 (В) 3915 (Г) 3916 (Д) 3960

3. Колико има бијекција које пресликавају неке непарне природне је-дноцифрене бројеве у неке непарне природне једноцифрене бројеве?

(А) 1545 (Б) $1! + 2! + 3! + 4! + 5!$ (В) 1520 (Г) $5! \cdot 15$ (Д) 1225

4. Колико има симетричних бинарних релација дефинисаних на скупу који има 2016 елемената?