Подружница математичара Ваљево
Ваљевска гимназија

МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР „ИНТЕГРАЛ КУП”

Ваљево, 02. 12. 2017.

Задаци на турниру су подељени у три целине: I алгебра и бројеви, II геометрија и III комбинаторика. У оквиру сваке целине дата су по три задатка са вишеструким избором и један задатак који је потребно детаљно решити. У сваком задатаку са вишеструким избором понуђено је пет одговора (**А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак, треба да заокружи слово **Н**. Ако је заокружен само тачан одговор добија се 5 поена, ако је заокружен нетачан одговор добија се -1 поен, ако је заокружено само слово **Н** добија се 0 поена. Задаци који нису са вишеструким избором вреде 10 поена. На тесту се може освојити највише 75 поена. Време за израду задатака је 150 минута.

6. разред

I Алгебра и бројеви

1. Колико укупно природних делилаца има број $2 \cdot 17 \cdot 2017$, знајући да је број 2017 прост?

(А) 3 (Б) 4 (В) 6 (Г) 8 (Д) 34 (Н) Не знам

2. Збир цифара најмањег троцифреног природног броја који при дељењу са 5, 6 и 7 даје остатак 2 је:

(А) 4 (Б) 5 (В) 8 (Г) 9 (Д) 12 (Н) Не знам

3. Збир пет различитих целих бројева је 200. Ако је највећи од ових сабирака једнак x, колика је најмања могућа вредност броја x?

(А) 41 (Б) 42 (В) 43 (Г) 44 (Д) 45 (Н) Не знам

4. У једном одељењу које има не мање од 30 и не више од 40 ученика, $\frac{5}{6}$ укупног броја ученика разред није завршило са одличним успехом, а $\frac{8}{9}$ разред није завршило са недовољним успехом. Ако је $\frac{1}{3}$ укупног броја ученика разред завршила са довољним успехом, а $\frac{1}{4}$ са добрим, колико је ученика разред завршило са врло добрим успехом?

II Геометрија

1. Једнакокраких троуглова код којих се угао на основици и угао при врху разликују за 30° има:

(А) 0 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3 (Д) 4 (Н) Не знам

2. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена C. На страници AB изабрана је тачка D различита од A и B таква да је троугао BCD правоугли. Тачка E је пресек симетрале угла ACB и странице AB. Ако је $\angle CAB = 36°$, онда је $\angle DCE$ једнак:

(А) $72°$ (Б) $36°$ (В) $27°$ (Г) $18°$ (Д) $9°$ (Н) Не знам

3. Колико има троуглова са целобројним дужинама страница у центиметрима, чије су две странице $2\,\mathrm{cm}$ и $2017\,\mathrm{cm}$?

(А) 0 (Б) 1 (В) 2 (Г) 3 (Д) више од 3 (Н) Не знам

4. Симетрала угла $\angle BAC$ и симетрала странице AC троугла ABC, секу се у тачки D. Израчунати меру угла $\angle BAC$ ако права која садржи тачке C и D гради са страницом AB прав угао.

III Комбинаторика

1. Колико има природних бројева којима је и збир и производ цифара једнак 6?

(А) 24 (Б) 18 (В) 3 (Г) 12 (Д) 6 (Н) Не знам

2. Четвороцифрених природних бројева написаних цифрама 1, 2, 3 тако да се свака цифра појављује бар једном има:

(А) 81 (Б) 18 (В) 36 (Г) 24 (Д) 54 (Н) Не знам

3. У народном колу, у коме су први и последњи играч раздвојени, за руке се држи двадесеторо деце. Сва деца су различите висине. Ако је седморо деце веће од свог левог суседа, колико је деце веће од свог десног суседа?

(А) 7 (Б) 9 (В) 12 (Г) 13 (Д) Немогуће је одредити (Н) Не знам

4. Одредити збир свих троцифрених природних бројева дељивих са 11.

ОДГОВОРИ И РЕШЕЊА

I Алгебра и бројеви

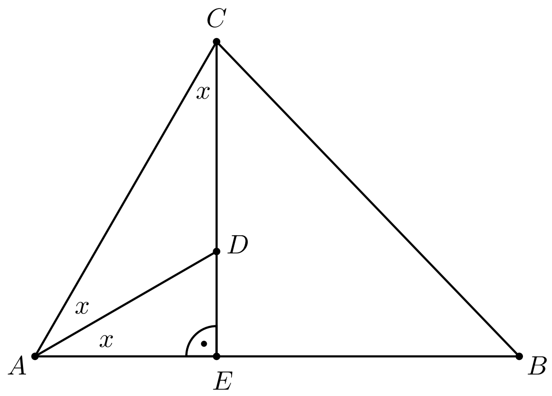
Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Г**	**Б**	**Б**

Задатак 4. Број ученика је дељив са 6, 9, 3 и 4, па је дељив са 36, што значи да је тај број баш 36. Како је одличних $\frac{1}{6}$, недовољних $\frac{1}{9}$, довољних $\frac{1}{3}$, добрих $\frac{1}{4}$, односно 6, 4, 12 и 9 редом, следи да је 5 ученика разред завршило са врло добрим успехом.

II Геометрија

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**В**	**Д**	**Г**

Задатак 4. Нека је E тачка у којој права CD сече дуж AB. Означимо са x половину угла BAC. Како је D на симетрали $\angle EAC$ то је $\angle EAD = \angle DAC = x$. Даље, како D припада симетрали дужи AC то је $DA = DC$ па из троугла ADC закључујемо да је $\angle ACD = \angle DAC = x$. Сада из троугла AEC добијамо $3x = 90°$, па је $x = 30°$, а $\angle BAC = 60°$.



III Комбинаторика

Број задатка	1	2	3
Тачан одоговор	**Д**	**В**	**В**

Задатак 4. Троцифрени бројеви дељиви са 11 се добијају као производи $11 \cdot 10$, $11 \cdot 11$, $\ldots$, $11 \cdot 90$. Њихов збир је једнак

$$11 \cdot (10 + 11 + \ldots + 90) = 11 \cdot \frac{81(10 + 90)}{2} = 44550$$